

**International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest 2004 — Hong Kong**

**國際數學奧林匹克
2004 香港選拔賽**

6th June, 2004
2004 年 6 月 6 日

Time allowed: 3 hours
時限：3 小時

Instructions to Candidates:

考生須知：

1. Answer ALL questions.
本卷各題全答。
2. Put your answers on the answer sheet.
請將答案寫在答題紙上。
3. The use of calculators is NOT allowed.
不可使用計算機。

1. Let $ABCDEFGH$ be a rectangular cuboid. How many acute-angled triangles are formed by joining any three vertices of the cuboid? (1 mark)
 設 $ABCDEFGH$ 為長方體。若把任意三個頂點連起，可組成多少個銳角三角形？ (1分)
2. A collector has N precious stones. If he takes away the three heaviest stones then the total weight of the stones decreases by 35%. From the remaining stones if he takes away the three lightest stones the total weight further decreases by $\frac{5}{13}$. Find N . (1 mark)
 一名收藏家擁有 N 塊寶石。若他拿走最重的三塊寶石，那麼寶石的總重量會減少 35%。若他從餘下的寶石中再拿走最輕的三塊，那麼寶石的總重量會再減少 $\frac{5}{13}$ 。求 N 。 (1分)
3. Denote by $[a]$ the greatest integer less than or equal to a . Let N be an integer, x and y be numbers satisfying the simultaneous equations $\begin{cases} [x]+2y=N+2 \\ [y]+2x=3-N \end{cases}$. Find x in terms of N . (1 mark)
 我們把小於或等於 a 的最大整數記作 $[a]$ 。設 N 為整數，且 x 和 y 滿足聯立方程 $\begin{cases} [x]+2y=N+2 \\ [y]+2x=3-N \end{cases}$ 。求 x ，答案以 N 表示。 (1分)
4. A *palindrome* is a positive integer which is the same when reading from the right hand side or from the left hand side, e.g. 2002. Find the largest five-digit palindrome which is divisible by 101. (1 mark)
 若某正整數不論從左面或右面讀起皆相同（例如：2002），則該數稱為「回文數」。求可被 101 整除的最大五位回文數。 (1分)
5. Evaluate $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{2004}{2002!+2003!+2004!}$. (1 mark)
 求 $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{2004}{2002!+2003!+2004!}$ 的值。 (1分)
6. If $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2004}{2005}$, find $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. (1 mark)
 若 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2004}{2005}$ ，求 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 。 (1分)
7. Let D be a point inside triangle $\triangle ABC$ such that $AB = DC$, $\angle DCA = 24^\circ$, $\angle DAC = 31^\circ$ and $\angle ABC = 55^\circ$. Find $\angle DAB$. (1 mark)
 設 D 為 $\triangle ABC$ 內的一點，使得 $AB = DC$ ， $\angle DCA = 24^\circ$ ， $\angle DAC = 31^\circ$ ，且 $\angle ABC = 55^\circ$ 。求 $\angle DAB$ 。 (1分)

8. It is known that 999973 has exactly three distinct prime factors. Find the sum of these prime factors. (1 mark)
 已知 999973 剛好有三個不同的質因數。求這些質因數之和。 (1 分)
9. A person picks n different prime numbers less than 150 and finds that they form an arithmetic sequence. What is the greatest possible value of n ? (1 mark)
 某人選取了 n 個不同的質數，每個均小於 150。他發現這些質數組成一個等差數列。求 n 的最大可能值。 (1 分)
10. Given a positive integer n , let $p(n)$ be the product of the non-zero digits of n . For example, $p(7) = 7$, $p(204) = 2 \times 4 = 8$, etc. Let $S = p(1) + p(2) + \dots + p(999)$. What is the largest prime factor of S ? (1 mark)
 對於正整數 n ，設 $p(n)$ 為 n 的所有非零數字之積。
 例如： $p(7) = 7$ 、 $p(204) = 2 \times 4 = 8$ 等。
 設 $S = p(1) + p(2) + \dots + p(999)$ 。那麼， S 最大的質因數是甚麼？ (1 分)
11. If
$$\begin{cases} A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2003 \times 2004} \\ B = \frac{1}{1003 \times 2004} + \frac{1}{1004 \times 2003} + \dots + \frac{1}{2004 \times 1003} \end{cases}, \text{ find } \frac{A}{B}. \quad (1 \text{ mark})$$

 若
$$\begin{cases} A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2003 \times 2004} \\ B = \frac{1}{1003 \times 2004} + \frac{1}{1004 \times 2003} + \dots + \frac{1}{2004 \times 1003} \end{cases}, \text{ 求 } \frac{A}{B}. \quad (1 \text{ 分})$$
12. Find the number of 6-digit positive integers \overline{abcdef} satisfying the following two conditions: (1 mark)
 (a) Each digit is non-zero.
 (b) $a \times b + c \times d + e \times f$ is even.
 求符合以下兩個條件的六位正整數 \overline{abcdef} 的數目：
 (a) 每位數字皆不等於零。
 (b) $a \times b + c \times d + e \times f$ 是偶數。 (1 分)
13. Find the area enclosed by the graph $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ on the xy -plane. (2 marks)
 求 xy 坐標平面上由圖像 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 所圍出的面積。 (2 分)
14. Determine the number of ordered pairs of integers (m, n) for which $mn \geq 0$ and $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$. (2 marks)
 求滿足 $mn \geq 0$ 及 $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$ 的整數序偶 (m, n) 的數目。 (2 分)

15. A natural number n is said to be *lucky* if 2^{-n} and 2^{-n-1} have the same number of significant figures when written in decimal notation. For example, 3 is lucky since $2^{-3} = 0.125$ and $2^{-4} = 0.0625$ have the same number of significant figures. On the other hand $2^{-5} = 0.03125$ has one more significant figure than 0.0625, so 4 is not lucky. Given that $\log 2 = 0.301$ (correct to 3 significant figures), how many lucky numbers are less than 2004? (2 marks)

對於自然數 n ，若 2^{-n} 和 2^{-n-1} 兩數以十進制表示時有效數字的數目相同，則 n 稱為「幸運數」。例如： $2^{-3} = 0.125$ 和 $2^{-4} = 0.0625$ 兩數中有效數字的數目相同，因此 3 是幸運數。另一方面，由於 $2^{-5} = 0.03125$ 比 0.0625 多了一個有效數字，所以 4 不是幸運數。已知 $\log 2 = 0.301$ （準確至 3 位有效數字），問有多少個幸運數小於 2004？ (2 分)

16. A positive integer n is said to be *good* if $3n$ is a re-ordering of the digits of n when they are expressed in decimal notation. Find a four-digit good integer which is divisible by 11. (2 marks)

對於正整數 n ，若在十進制表示中，整數 $3n$ 可從 n 的數字經重新排列而得出，則 n 稱為「好數」。求一個可被 11 整除的四位好數。 (2 分)

17. From any n -digit ($n > 1$) number a , we can obtain a $2n$ -digit number b by writing two copies of a one after the other. If $\frac{b}{a^2}$ is an integer, find the value of this integer. (2 marks)

對於任意 n 位數 a （其中 $n > 1$ ），把 a 連寫兩次可得到一個 $2n$ 位數 b 。若 $\frac{b}{a^2}$ 為整數，求此整數的值。 (2 分)

18. Find the sum of all x such that $0 \leq x \leq 360$ and $\cos 12x^\circ = 5 \sin 3x^\circ + 9 \tan^2 x^\circ + \cot^2 x^\circ$. (2 marks)
求所有滿足 $0 \leq x \leq 360$ 及 $\cos 12x^\circ = 5 \sin 3x^\circ + 9 \tan^2 x^\circ + \cot^2 x^\circ$ 的 x 值之和。 (2 分)

19. ABC and GBD are straight lines. E is a point on CD produced, and AD meets EG at F . If $\angle CAD = \angle EGD$, $EF = FG$, $AB : BC = 1 : 2$ and $CD : DE = 3 : 2$, find $BD : DF$. (3 marks)

ABC 和 GBD 均為直線， E 是 CD 延線上的一點，且 AD 交 EG 於 F 。若 $\angle CAD = \angle EGD$ ， $EF = FG$ ， $AB : BC = 1 : 2$ ，且 $CD : DE = 3 : 2$ ，求 $BD : DF$ 。 (3 分)

20. For any positive integer n , let $f(n)$ denote the index of the highest power of 2 which divides $n!$, e.g. $f(10) = 8$ since $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Find the value of $f(1) + f(2) + \dots + f(1023)$. (3 marks)

對於任何正整數 n ，設 $f(n)$ 為可整除 $n!$ 的 2 的最高乘幂的指數。例如：因為 $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ ，所以 $f(10) = 8$ 。求 $f(1) + f(2) + \dots + f(1023)$ 的值。 (3 分)

End of Paper
全卷完