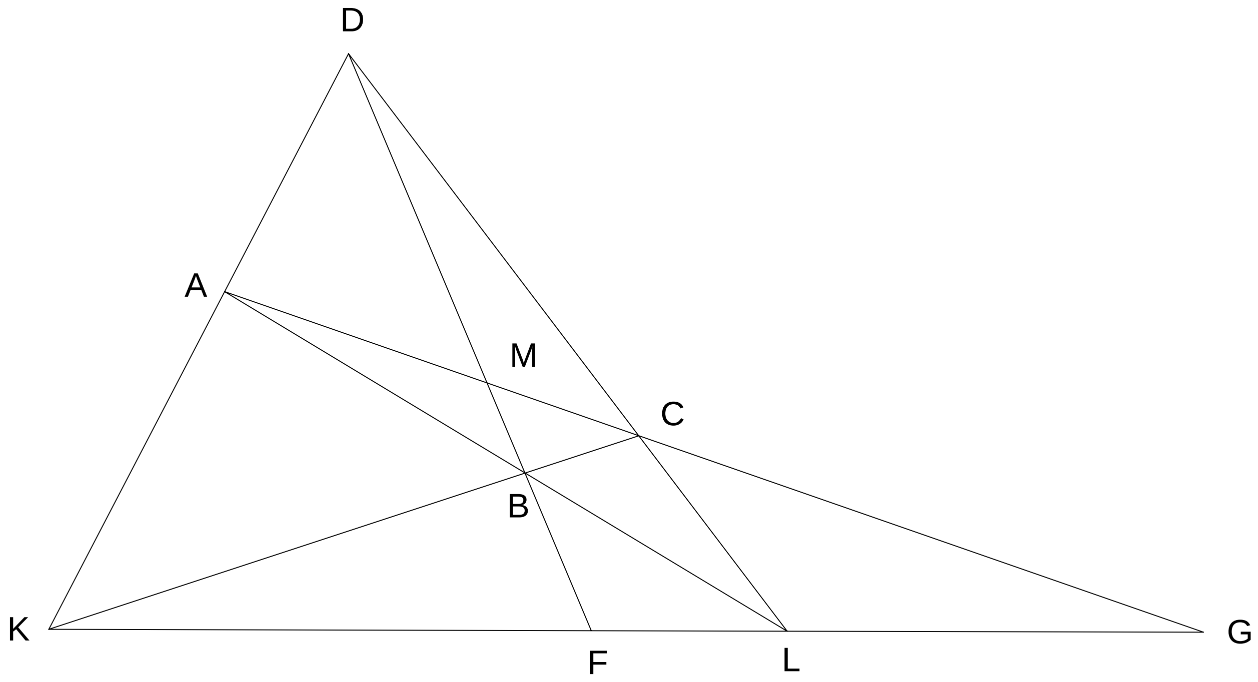
<u>巧題妙解</u>

著名數學大師華羅庚在《1978 年全國中學生數學競賽題解》前言中，談到了這樣一個有趣的幾何題。

問題：凸四邊形 $ABCD$ 的兩邊 AD、BC 延長後交於 K，兩邊 AB、CD 延長後交於 L，對角線 BD、AC 延長後分別與 KL 交於 F、G。

求證

$$\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}\text{ 。}$$



我國幾何大師張景中教授用共邊定理對此題給出了一個漂亮的證明：

$$
\begin{aligned}
\frac{KF}{LF} &= \frac{\Delta KBD}{\Delta LBD} \\
&= \frac{\Delta KBD}{\Delta KBL} \cdot \frac{\Delta KBL}{\Delta LBD} \\
&= \frac{CD}{CL} \cdot \frac{AK}{AD} \\
&= \frac{\Delta ACD}{\Delta ACL} \cdot \frac{\Delta ACK}{\Delta ACD} \\
&= \frac{\Delta ACK}{\Delta ACL} \\
&= \frac{KG}{LG}
\end{aligned}
$$

這個證明的漂亮之處在於它起點夠低、觀點夠高，整個證明只用到共邊定理和簡單的過度技巧，就能把所有已知條件集中起來，可爲解題的典範。其實，只要我們把起點放高，就可以得到一個更簡潔的證明：

由塞瓦定理(Ceva’s Theorem)可知

$$\frac{DA}{AK} \cdot \frac{KF}{FL} \cdot \frac{LC}{CD} = 1 \text{。}$$

由梅涅勞斯定理(Menelaus’ Theorem)可知

$$\frac{DA}{AK} \cdot \frac{KG}{GL} \cdot \frac{LC}{CD} = 1 \text{。}$$

比較兩式可知 $\frac{KF}{LF} = \frac{KG}{LG}$ 。

以上兩個證明都各有千秋，不知道同學喜歡那一個呢？