巧題妙解

數學學會為增進同學對數學的興趣，特意四出搜集難題和解答，以供同學欣賞。這次被我們所選出的是第 24 屆國際數學奧林匹克比賽第 6 題。

問題：設a,b,c為三角形三邊的邊長，求證

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geq 0\text{ 。}$$

面對這條問題，我想多數人都會考慮作出變量代換

$$\begin{cases} a=y+z \\ b=z+x \\ c=x+y \end{cases}\text{，}$$

這樣的確可以解決到問題(同學不妨一試)，但我們這次要看的是當年德國的一名選手，對本題作出的一個絕妙解法。(他亦為此得到大會頒授特別獎)

解：因原式循環對稱，故可設$a\geq b,a\geq c$，於是

$$\text{左式}=a(c-b)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq 0\text{ 。}$$

證畢