

排列和組合是兩種最常見也是最基本的計數模型，其內容是大家所熟知的。

排列就是從 n 個不同元素中取出 r 個 ($1 \leq r \leq n$) 來排成一列，要求其不同排法的數目。在這裏，元素和元素之間存在次序，即是說，即使所取的 r 個元素相同，但在排成一列時的次序不完全相同，也算作是不同的排法。在 $r < n$ 時，叫做選排列，簡稱排列；在 $r = n$ 時，叫做全排列。選排列數目為

$$P_r^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

全排列數目為

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

其中 $n!$ 是一個符號，讀做「 n 的階乘」。

組合則是考慮由 n 個不同元素中取出 r 個來的不同取法數目，在所取出的 r 個元素之間是不存在次序問題的，因此組合數的計算公式為

$$C_r^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

除了排列模型和組合模型之外，我們還經常會碰到一些其他的計數模型。有些問題，固然也能利用排列組合模型並結合乘法和加法原理以解決，但如果採用其他一些計數模型，便可以起到簡化計算的作

用，而且這些計數模型本身的原理也很簡單，學會並掌握它們，確實很有好處。以下就是一些常見的計數模型。

重複組合：自 n 種不同的元素中(每種至少有 r 個)，任取 r 個元素(可以重複選取)，其組合數目為

$$H_r^n = C_r^{n+r-1}$$

現在我們將分兩步來證明此公式。

1. 首先研究有多少種方法將 r 個相同的球分放進 n 個不同的盒子裏，其中允許出現空盒。

設各個盒依次分得 x_1, x_2, \dots, x_n 個球 ($x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$)，將其表示為

$$\underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_1\text{個}} + \underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_2\text{個}} + \cdots + \underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_n\text{個}}$$

r 個「O」和 $n-1$ 個「+」排成一列，每一種排法對應一種分法，故 r 個相同的球分進 n 個不同的盒子裏，分法有 C_r^{n+r-1} 種（因為要從 $n+r-1$ 個空位中選出 r 個來放上「O」，這是組合模型）。

借助分球入盒的問題，我們知道方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ 共有 C_r^{n+r-1} 組非負整數解，這個結果亦是一種常用的計數模型。

2. 接下來考慮重複組合，設有 n 種不同的物件 a_1, a_2, \dots, a_n （每種至少有 r 個），我們要從中任意選取 r 個（可以重複），不妨假定我們選了 x_1 個 a_1 、 x_2 個 a_2 x_n 個 a_n ，這樣便有 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ ，而方程的每一組解對應一種取法，故共有 C_r^{n+r-1} 種取法。

除了以上所提到的計數模型外，還有一種常見的模型，那就是「不盡相異元素的排列問題」。爲了清楚表達的原故，我們先考慮最簡單的情況：設想有 m 個白球和 n 個黑球，若將它們排成一列，問共有多少種排法？這個問題表面上是關於排列的方法，但其實屬於組合模型，那是因爲我們要從 $m+n$ 個空位中選出 m 個位來放白球（或選出 n 個位來放黑球），故排列方法共有 C_{m+n}^m （或 C_{m+n}^n ）種。

現在嘗試將結論一般化，假設我們有 k 種顏色的球，分別有 n_1, n_2, \dots, n_k 個，球的總數爲 m ，問排列的方法又有多少種？我們可以這樣想：先從 m 個空位中選出 n_1 個位來放第一種顏色的球，方法有 $C_m^{n_1}$ 種，再從餘下的 $m-n_1$ 個空位中選出 n_2 個來放第二種顏色的球，方法有 $C_{m-n_1}^{n_2}$ 種，如此類推，排列的方法共有

$$C_{n_1}^m \cdot C_{n_2}^{m-n_1} \dots C_{n_k}^{n_k} = \frac{m!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \text{種。}$$

看過了基本的計數模型後，就要靈活地將實際問題對號入座，換句話說就是要首先要判斷問題屬於那種計數模型，然後再套用現成的公式。當遇到一些比較複雜的問題時，甚至可能需要交互使用幾種計數模型來解題。

例一：將 $(a+b+c)^7$ 展開並簡化後，共有多少個相異項？

解：每一項對應於一種「自3種物件中任取7個之組合」（重複組合模型！），故相異項共有 $H_7^3 = C_7^9 = C_2^9 = 36$ 項。

例二：方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 100$ 共有多少組正整數解？

解法一：設想有100個相同的球排成一行，球與球之間共有99個空位，我們從中選出9個空位來放上「+」，每一種選法都對應方程的一組解。例如，方程的每一組解可以表示為

$$\underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_1\text{個}} + \underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_2\text{個}} + \cdots + \underbrace{\text{O}\cdots\text{O}}_{x_{10}\text{個}}。$$

故方程共有 C_9^{99} 組解。

解法二：設 $x_i = y_i + 1 (i = 1, 2, \dots, 10)$ ，方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 100$ 的正整數解就對應方程 $y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = 90$ 的非負整數解（這是我們已解決了的問題），故共有 $H_{90}^{10} = C_{90}^{99} = C_9^{99}$ 組解。

例三：擲4個不同的骰子，問出現的點數和不大於9的情況有幾種？

解：設4個骰子出現的點數為 x, y, z, u ，則4個骰子點數和不大於9的情形就對應不等式 $x + y + z + u \leq 9$ 的正整數解，亦對應不等式 $x' + y' + z' + u' \leq 5$ 的非負整數解。

引入多一個非負整數 t ，使不等式轉化為方程

$$x' + y' + z' + u' + t = 5，故共有 $H_5^5 = C_5^9 = C_4^9 = 126$ 種。$$

例四：設有 n 本不同的書，要分給 r 個人，他們各得 k_1, k_2, \dots, k_r 本
($k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$)，有多少種不同的分法？

解：這是不盡相異元素的排列模型，故分法共有 $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ 種。

例五：甲乙兩隊各出 7 名隊員按事先排好的順序出場參加圍棋擂台
賽。雙方先由 1 號隊員比賽，負者被淘汰，勝者再與負方 2 號
隊員比賽……直到有一方隊員全被淘汰為止，形成一種比賽過
程。試求所有可能出現的比賽過程的種數。

解：設想有 7 個「A」字和 7 個「B」字排成一行(用它們代表甲方和
乙方已排定了順序的隊員)，每一種排法對應一種比賽過程。例如
ABBABBBAAAABAB 就代表甲方的 1 號隊員一出場就輸了給乙方的
1 號隊員，然後甲方的 2 號連勝兩場，如此類推。
從而比賽過程一共有 C_7^{14} 種。