

## 黑洞數

### 一、甚麼是黑洞數？

黑洞數又稱陷阱數，是類具有奇特轉換特性的整數。任何一個數字不全相同整數，經有限“重排求差”操作，總是會得某一個或一些數，這些數即為黑洞數。“重排求差”操作即組成該數得排後的最大數去重排的最小數。

1955年，卡普耶卡(D.R.Kaprekar)研究了對四位數的一種變換：任給出四位數 $k_0$ ，用它的四個數字由大到小重新排列成一個四位數 $m$ ，再減去它的反序數 $\text{rev}(m)$ ，得出數 $k_1=m-\text{rev}(m)$ ，然後，繼續對 $k_1$ 重複上述變換，得數 $k_2$ 。如此進行下去，卡普耶卡發現，無論 $k_0$ 是多大的四位數，只要四個數位不全相同，最多進行7次上述變換，就會出現四位數6174。

### 二、黑洞數的證明

隨便造一個四位數，如 $a=1628$ ，先把組成部分1628的四個數字由大到小排列得到 $b=8621$ ，再把1628的四個數字由小到大排列得 $c=1268$ ，用大的減去小的 $B-C=8621-1268=7353$ ，把7353按上面的方法再作一遍，由大到小排列得7533，由小到大排列得3357，相減 $7533-3357=4176$ ，把4176再重複一遍： $7641-1467=6174$ 。

如果再繼續操作下去，神奇的事情就發生了！ $7641-1467=6174$ ，又回到6174。這是偶然的嗎？我們再隨便舉一個數1331，按上面的方法連續去做： $3311-1133=2178$   $8721-1278=7443$   $7443-3447=3996$   $9963-3699=6264$   $6624-2466=4158$   $8541-1458=7083$   $8730-378=8352$   $8532-2358=6174$

證明:設 $A>B>C>D$

第一次操作可能出現7種情況:

- (1)AAAB-BAAA
- (2)ABBB-BBBA
- (3)AABB-BBAA
- (4)AABC-CBAA
- (5)ABBC-CBBA
- (6)ABCC-CCBA
- (7)ABCD-DCBA

考慮(1),AAAB-BAAA 的個位數為 $10+B-A$ ,十位,百位都是9,千位是 $A-B-1$

考慮(2),ABBB-BBBA 的個位數為 $10+B-A$ ,十位,百位都是9,千位是 $A-B-1$

考慮(3),AABB-BBAA 的個位數為 $10+B-A$ ,十位為 $9+B-A$ ,百位是 $A-B-1$ ,千位是 $A-B$

考慮(4),AABC-CBAA 的個位數為 $10+C-A$ ,十位為 $9+B-A$ ,百位是 $A-B-1$ ,千位是 $A-C$

考慮(5),ABBC-CBBA 的個位數為 $10+C-A$ ,十位,百位都是9,千位是 $A-C-1$

考慮(6),ABCC-CCBA 的個位數為  $10+C-A$ ,十位為  $9+C-B$ ,百位是  $B-C-1$ ,千位是  $A-C$   
考慮(7),ABCD-DCBA 的個位數為  $10+D-A$ ,十位為  $9+C-B$ ,百位是  $B-C-1$ ,千位是  $A-D$   
注意到(1)中操作後新四位數的千位,個位的和為 9,因此新四位數隻可能是  
0999,1998,2997,3996,4995(後面的 5994,6993,7992,8991,9990 可以不用考慮,因為下次  
操作時 4995,5994 計算結果相同,其餘類似)

同理,(2),(5)中操作後新四位數和(1)一樣

(3),(4),(6),(7)中操作後新四位數的千位,個位的和為 10,百位,十位的和為 8,因此新  
四位數隻可能是

1089,1179,1269,1359,1449,2088,2178,2268,2358,2448,3087,3177,3267,3357,3447,4086,  
4176,4266,4356,4446,5085,5175,5265,5355,5445

所以我們只需驗證下面這 30 個數經過不超過 6 次操作後可以得到 6174 即可  
0999,1998,2997,3996,4995,1089,1179,1269,1359,1449,2088,2178,2268,2358,2448,3087,  
3177,3267,3357,3447,4086,4176,4266,4356,4446,5085,5175,5265,5355,5445

將 30 個數分為 6 個集合

$S_1=\{4176,2358\}$

$S_2=\{1179,1269,2088,3087,3357,4266\}$

$S_3=\{1089,4356,1998,3996\}$

$S_4=\{0999,2268,3177,3447,4446,5265,5355,5445\}$

$S_5=\{2997,4995,2178,3267\}$

$S_6=\{1359,1449,2448,4086,5085,5175\}$

則  $S_{(i+1)}$ 中的任意一個元素經過一次操作後,新四位數作適當排列可以得到  $S_i$  中  
的某一個元素,且  $S_1$  中的任意一個元素經過一次操作後必定得到 6174,證明完.

事實上,黑洞數也可以用程式來證明的:

```
sub(i)
```

```
int i;
```

```
{int p,k,j,h,max,min,a[5];
```

```
a[1]=i/1000;a[2]=(i/100)%10;
```

```
a[3]=(i%100)/10;
```

```
a[4]=i%10
```

```
for (a=1;a<=3;a++)
```

```
for (b=a+1;b<=4;b++)
```

```
if{(a[a]<a[b]);gg=a[a];a[k]=a[b];a[b]=gg;}
```

```
max=a[1]*1000+a[2]*100+a[3]*10+a[4]
```

```
min=a[4]*1000+a[3]*100+a[2]*10+a[1]
```

```

p=man-min
return(p);
}

main()
{int n,y,i,m;
printf("\n 所有四位數經重排求差操作,可至 6174 或 0.");
for (y=0,n=1000;n<=9999;n++)
{i=n;m=0;
while (i!=6174 && i!=0)
{i=sub(i);m++;}
if(m>y) y=m;}
printf("\n 驗證全可轉換最多轉換次數為:%d\n",y);
printf("需要看某數的轉換過程,請輸入該數,否則輸入 0:");
scanf("%d",&i);
if(i=0) exit(0);
printf("%d",i);
while(i!=6174 && i!=0)
{i=sub(i);printf("->%d",i);}
}

```

注：

若四位元數  $i$  的四個數字全同，一次轉即為 0.因而,可把 0 到 6174 一併作為判別條件.

### 三、其他的「黑洞數」

其實，除了四位數有黑洞數以外，其他不同位的數目也有自己的「黑洞數」呢！就以三位數為例，它們也有自己的「黑洞數」。

證明：設  $A > B > C$

第一次操作可能出現 3 種情況:

(1)AAB-BAA

(2)ABB-BBA

(3)ABC-CBA

考慮(1), AAB-BAA 的個位數為  $B-A$ ,十位數為 0,百位數為  $A-B = 99(A-B)$

考慮(2), ABB-BBA 的個位數為  $B-A$ ,十位數為 0,百位數為  $A-B = 99(A-B)$

考慮(3), ABC-CBA 的個位數為  $C-A$ ,十位數為 0,百位數為  $A-C = 99(A-C)$

所以，得出來的數目必為 99 的倍數，所以得出的數目可能為 198, 297, 396, 495

(594, 693, 792, 891 不用考慮，因操作後得出結果會跟 198, 297, 396, 495 的相同)  
(99, 990 不用考慮，因不符合)

將 4 個數分爲 4 個集合

$$S1 = \{495\}$$

$$S2 = \{396\}$$

$$S3 = \{297\}$$

$$S4 = \{198\}$$

則  $S_{i+1}$  中的元素經過一次操作後,新四位數作適當排列可以得到  $S_i$  中的元素，  
所以只需證明 495， $954-459 = 495$ ，證明完。

不過，兩位數就沒有「黑洞數」了。

證明：設  $A > B$

第一次操作會出現的情況：

$$AB - BA, \text{ 其個位數爲}(B - A), \text{ 十位數爲}(A - B) = 9(A - B)$$

所以必爲 9 的倍數，得出來的數目可能爲 18, 27, 36, 45

(54, 63, 72, 81 不用考慮，因操作後得出結果會跟 18, 27, 36, 45 的相同)

(9, 90 不用考慮，因不符合)

將 4 個數分爲 4 個集合

$$S1 = \{45\}$$

$$S2 = \{36\}$$

$$S3 = \{27\}$$

$$S4 = \{18\}$$

則  $S_{i+1}$  中的元素經過一次操作後,新四位數作適當排列可以得到  $S_i$  中的元素，  
所以只需證明 45， $54-45 = 9$ ，因此兩位數是沒有「黑洞數」的，證明完。

五位數則有自己的「黑洞數」循環。

證明：設  $A > B > C > D > E$

第一次操作可能出現 15 種情況:

$$(1) AAAAB - BAAAA$$

$$(9) ABBCC - CBBBA$$

$$(2) AAABB - BBBA$$

$$(10) ABCCC - CBBBA \quad \text{同上}$$

$$(3) AABBB - BBBA \quad \text{同上}$$

$$(11) AABCD - DCBAA$$

$$(4) ABBBB - BBBBA \quad \text{同(1)}$$

$$(12) ABBCD - DCBBA$$

$$(5) AAABC - CBAAA$$

$$(13) ABCCD - DCCBA \quad \text{同上}$$

$$(6) AABBC - CBBAA \quad \text{同上}$$

$$(14) ABCDD - DDBCA$$

$$(7) AABCC - CBBAA$$

$$(15) ABCDE - EDCBA$$

$$(8) ABBBC - CBBBA$$

由於部分經操作後結果一樣，因此只需考慮 10 個情況。

$$\begin{array}{ll} \text{考慮(1) = } 9999(A - B) & (9) = 9999(A - C) + 90(B - C) \\ (2) = 10989(A - B) & (11) = 9999(C - A) + 990(D - A) \\ (5) = 9999(A - C) + 990(A - B) & (12) = 9999(A - D) + 990(B - C) \\ (7) = 10989(A - C) & (14) = 9999(A - D) + 990(B - D) \\ (8) = 9999(A - C) & (15) = 9999(A - E) + 990(B - D) \end{array}$$

操作後產生的新五位數可能是 19998, 29997, 39996, 49995, 10989, 21978, 32967, 43956, 54945, 20988, 22968, 23958, 24948, 25938, 26928, 27918, 28908……如此類推最後會發現五位黑洞數會有三個循環，

$$\begin{array}{l} (1) 71973 \rightarrow 83952 \rightarrow 74943 \rightarrow 62964 \rightarrow 71973 \\ (2) 82962 \rightarrow 75933 \rightarrow 63954 \rightarrow 61974 \rightarrow 82962 \\ (3) 53955 \rightarrow 59994 \rightarrow 53955 \end{array}$$

六位數，七位數皆有自己的「黑洞數」的獨特性，如果想知道，就要動動腦筋，或到以下網址查考 -

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%91%E6%B4%9E%E6%95%B8>

總括來說，黑洞數的確十分神奇，就像黑洞一般將數字緊緊吸住。只要你多接觸它，就會慢慢地發現它的趣味了！

(四)、 資料參考(網址)

<http://baike.baidu.com/view/41442.htm>

<http://hk.knowledge.yahoo.com/question/?qid=7007100802944>

<http://163.17.226.1/sdvote/y94/html/math9402.pdf>

[http://www.hackhome.com/InfoView/Article\\_121685.html](http://www.hackhome.com/InfoView/Article_121685.html)

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%91%E6%B4%9E%E6%95%B8>

<http://scholar.ilib.cn/Abstract.aspx?A=gxdxwzfxxb200401017>

<http://www.programfan.com/article/2201.html>

<http://hk.knowledge.yahoo.com/question/?qid=7006121204663>