三次多項式的恆等式

$p^3+q^3+r^3+s^3+t^3$…能否拆解?

有沒有規律?

與 $p^3-q^3-r^3-s^3-t^3$…有沒有關係?

大家將會進入指數的世界

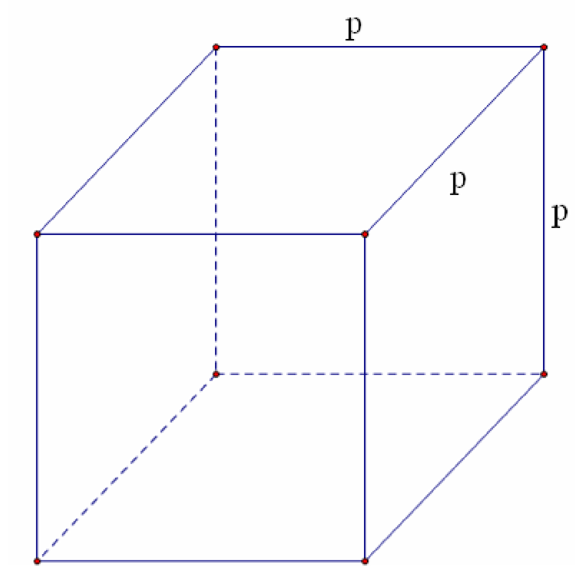
簡介

本論文是關於三次多項式的恆等式，大家可能對恆等式有一定的認識。初時的我也覺得不是太特別，到了某一日，有一位同學在堂上給了我一條問題(x,y,z 都是整數，$x^3+y^3+z^3=36$，尋找 x,y,z)。只是學會了兩個項的因式分解的我，解也解不出。她便將 $x^3+y^3+z^3$ 拆解為 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz$，在那時刻，我不明白如何拆解 $x^3+y^3+z^3$ 為 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz$，我便開始研究拆解時的步驟，我會利用圖解法來說明多項式的分解過程和介紹其規律，希望大家可以享受這個數學旅程。

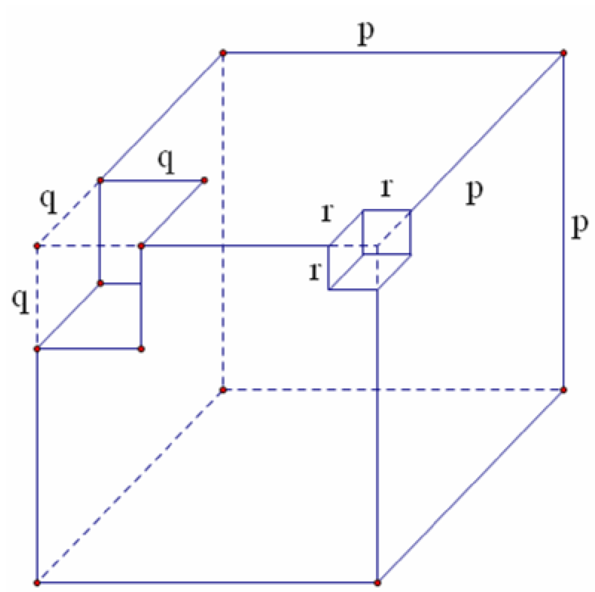
研究的開始

相信大家都學會二次多項式的因式分解，例如(x^2-y^2)會分解為$(x-y)(x+y)$。三次的兩項相信大家都熟識，便是 x^3+y^3 會被分解為$(x+y)(x-xy+y)$、x^3-y^3 會被分解為$(x-y)(x+xy+y)$。不過，大家覺不覺得學會了兩個項的因式分解，便開始滿足呢！其實，大家只要探究下去，會發現不少樂趣。

三個項的拆解(p^3-q^3-r^3)

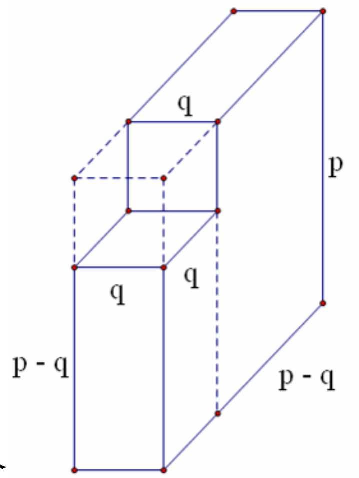


在上圖，我們可以看見一個邊長為 p 的立方體。然後，我們在立方體上分割出兩個立方體(邊長分別為 q 和 r)。(如下圖)



第二，我們開始把已被切割的立方體由左至右分割為三個部份。(如下圖)

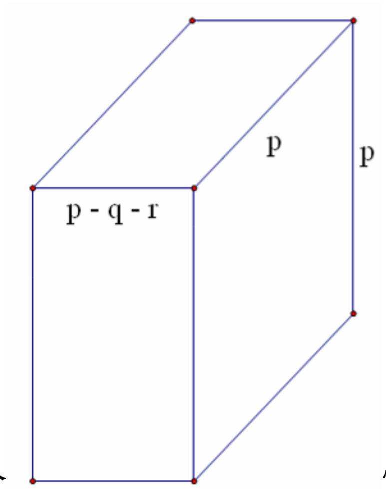
第一部分



體積：$q^2(p-q)+pq(p-q)$

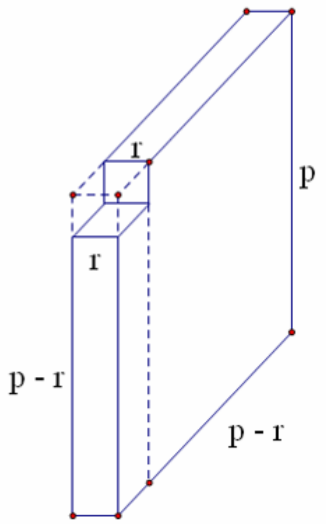
$=(q^2+pq)(p-q)$

第二部分



體積:$(p-q-r)p^2$

第三部分



體積：$r^2(p-r)+pr(p-r)$

$=(r^2+pr)(p-r)$

因此，我們可以得出這條公式：

$$p^3-q^3-r^3=(q^2+pq)(p-q)+p^2(p-q-r)+(r^2+pr)(p-r)$$

但是，我們應該如何簡化以上公式呢?

在(p^3-q^3)中，我們會分解爲$(p-q)(p^2+pq+q^2)$；在(p^3+q^3)中，我們會分解爲$(p+q)(p^2-pq+q^2)$。因此，我們看得出$(p-q)$會在(p^3-q^3)最後分解後成爲最後的其中一個因式，$(p+q)$也是在(p^3+q^3)成爲最後的其中一個因式。因此，我們推斷出$(p-q-r)$會在$(p^3-q^3-r^3)$中出現；$(p+q+r)$則會在$(p^3+q^3+r^3)$中出現。

如果我們重新排列，應該得出這條式：

$$(p-q-r)p^2+(r^2+pr)(p-r)+(q^2+pq)(p-q)$$

我們務求每一個項都要接近$(p-q-r)$，應該分解爲：

$$(p-q-r)p^2+(r^2+pr)(p-r)+(q^2+pq)(p-q)$$

$$=(p-q-r)p^2 +[(p-q-r)(r^2+pr)+q(r^2+pr)]$$

$$+[(p-q-r)(q^2+pq)+r(q^2+pq)]$$

$$=(p-q-r)p^2+(p-q-r)(r^2+pr)+(p-q-r)(q^2+pq)$$

$$+q(r^2+pr)+r(q^2+pq)$$

$$=(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+pq)+q(r^2+pr)+r(q^2+pq)$$

$$=(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+pq)+qr^2+pqr+q^2r+pqr$$

$=(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+pq)+qr(q+r)+2pqr$

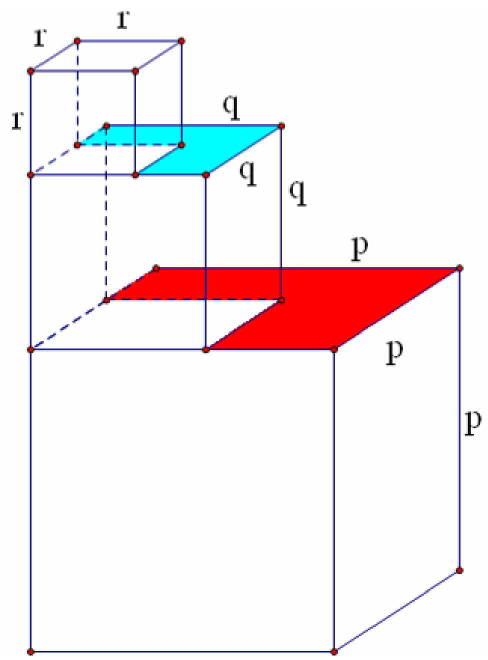
$=(p-q-r)\ (p^2+q^2+r^2+pr+pq)+qr(-p+q+r)+pqr+2pqr$

$=(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+pq)-(p-q-r)qr+3pqr$

最後，答案是 $p^3-q^3-r^3\equiv(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pq+pr-qr)+3pqr$

大家會不會覺得以上的拆解很像因式分解，但大家試想想：為甚麼我要把它稱為恆等式？

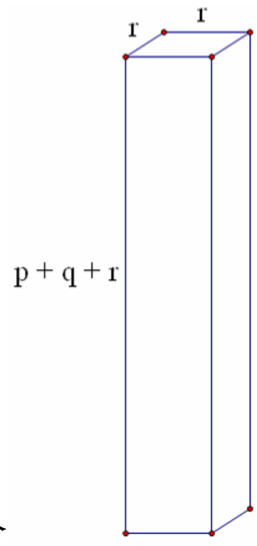
$(p^3+q^3+r^3)$



介紹減項後，當然不缺少加項。如果大家明白上述的因式分解，我便用更快和直接的方法來向大家證明。上圖已有三個立方體相加(三個立方體的邊長分別為 p、q 和 r)，加上顏色的地方是大家必需注意的，因為我在作圖時也差點兒忘記了這兩部分。再加上由高至

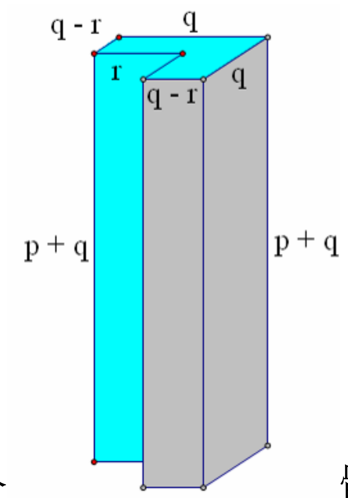
低切割方法，便得出三個部分。(如下圖)

第一部分



體積：$(p+q+r)r^2$

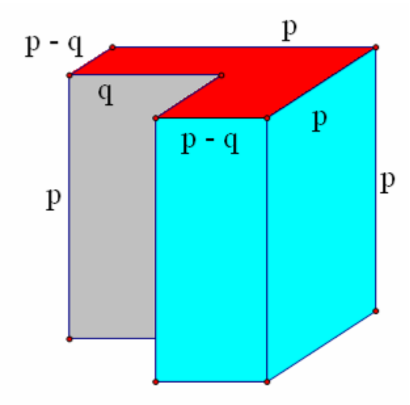
第二部分



體積：〔$(q-r)q+(q-r)r$〕$(p+q)$

$=(q^2-r^2)(p+q)$

第三部分



體積：$(p^2-q^2)p$

$=(p+q)(p-q)p$

$=(p+q)(p^2-pq)$

因此，我們可以得出這條公式：

$(p+q+r)r^2+(q^2-r^2)(p+q)+(p+q)(p^2-pq)$

根據推斷，每個項都要接近$(p+q+r)$：

$=(p+q+r)r^2+[(p+q+r)(q^2-r^2)-r(q+r)(q-r)]+(p+q)(p^2-pq)$

$=(p+q+r)r^2+(p+q+r)(q^2-r^2)-r(q+r)(q-r)$

$+[(p+q+r)(p^2-pq)-r(p^2-pq)]$

$=(p+q+r)q^2-(q+r)(qr-r^2)+(p+q+r)(p^2-pq)-r(p^2-pq)$

$=(p+q+r)\ (p^2+q^2-pq)-[(p+q+r)(qr-r^2)-p(qr-r^2)]-r(p^2-pq)$

$=(p+q+r)\ (p^2+q^2-pq)-(p+q+r)(qr-r^2)+p(qr-r^2)-p^2r+pqr$

$=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr)+pqr-pr^2-p^2r+pqr$

$=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr)-pr(p+r)+2pqr$

$=(p+q+r)\ (p^2+q^2+r^2-pq-qr)-[pr(p+q+r)-pqr]+2pqr$

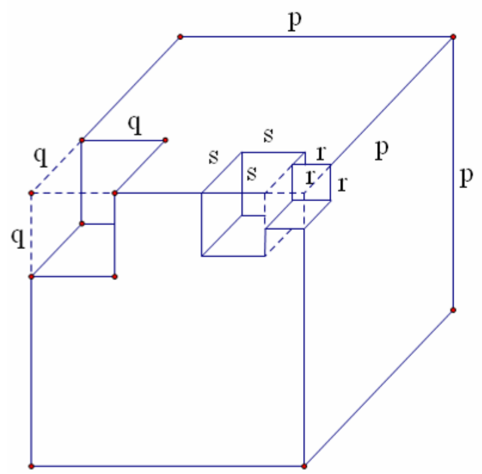
$=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr)-pr(p+q+r)+pqr+2pqr$

最後 $p^3+q^3+r^3\equiv(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr)+3pqr$

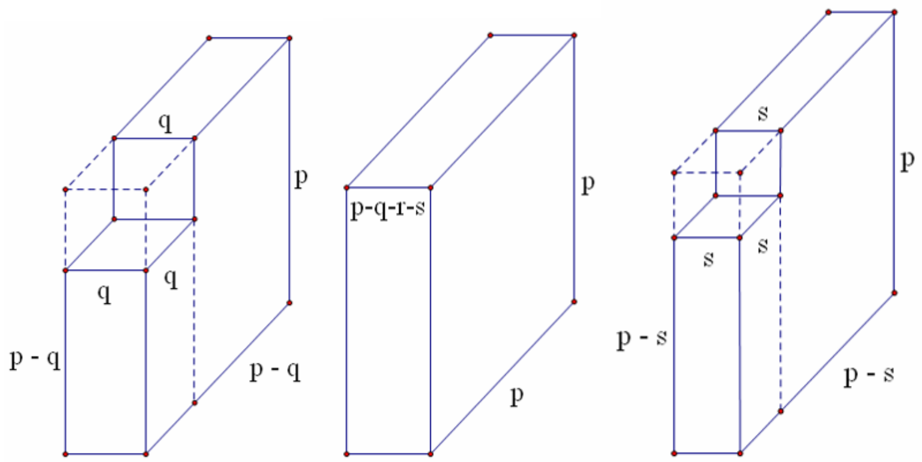
其實，大家可以把 $p^3-q^3-r^3$ 看作成 $p^3+(-q)^3+(-r)^3$ 或把 $p^3+q^3+r^3$ 看作 $p^3-(-q)^3-(-r)^3$，在加減項上的轉變可以容易掌握。

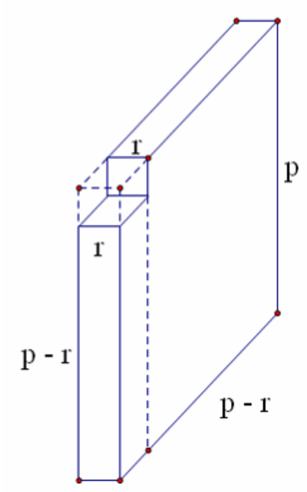
三個項介紹完後，我們便開始踏足四個項，但是我不會詳細和深入地解釋，因爲再以圖解法來解釋就會令你們沉悶，我只會給圖你們，再讓你們思考。不過，我會用另一種方法來解答出四個項的恆等式，或許大家覺得這種方法會較快。

$$p^3-q^3-r^3-s^3$$

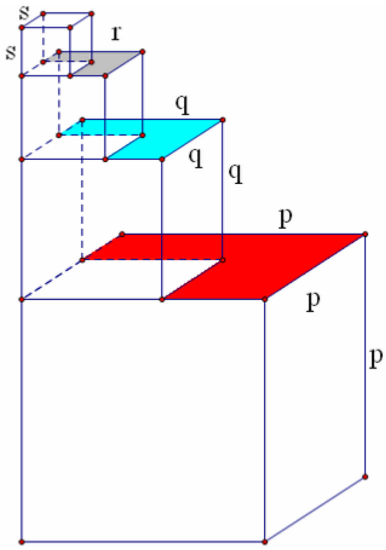


會被分割爲四個部分(左至右)

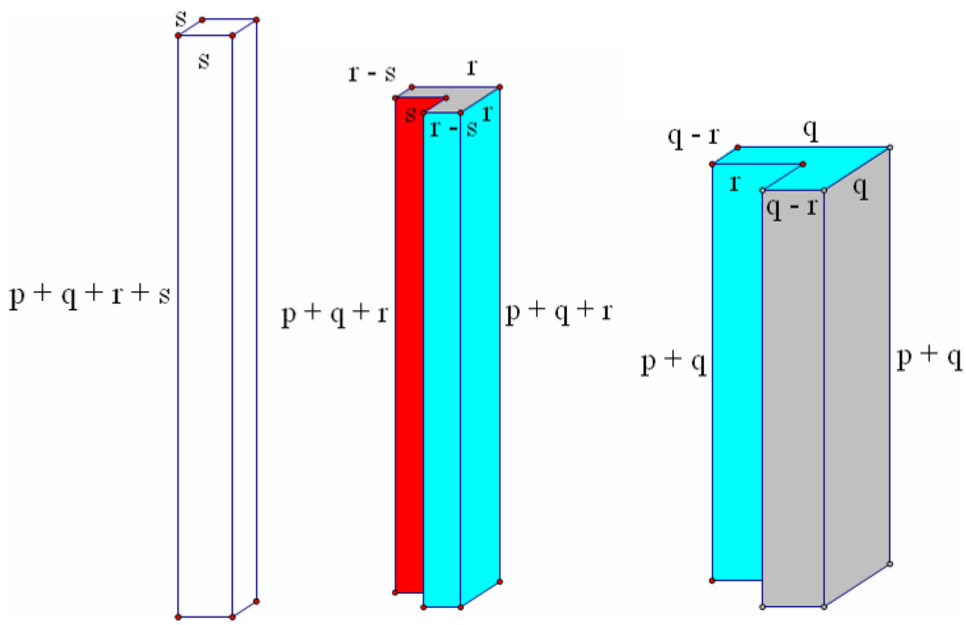


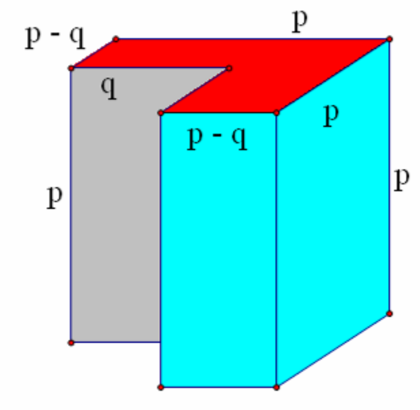


$$p^3+q^3+r^3+s^3$$



會被分割爲四個部分(上至下)





我們可以根據以上的方法來因式分解，或者可以用其他方法，現在我會用另一種方法來拆解四個項。

$$p^3-q^3-r^3-s^3$$

$p^3-q^3-r^3-s^3$ 可拆解為兩部分:

$p^3-q^3-(r^3+s^3)$

$=(p-q)(p^2+pq+q^2)-(r+s)(r^2-rs+s^2)$

$=(p-q-r-s)(p^2+pq+q^2)+(r+s)(p^2+pq+q^2)-$

$[(-p+q+r+s)(r^2-rs+s^2)+(p-q)(r^2-rs+s^2)]$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+pq)-(-p+q+r+s)(r^2-rs+s^2)$

$-(pr^2+ps^2-qr^2-qs^2-prs+qrs)+p^2r+q^2r+p^2s+q^2s+pqr+pqs$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+pq)+(p-q-r-s)(r^2-rs+s^2)$

$-pr^2-ps^2+qr^2+qs^2+prs-qrs+p^2r+q^2r+p^2s+q^2s+pqr+pqs$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq-rs)+p^2r-pr^2+p^2s-ps^2+qr^2+q^2r$

$+q^2s+qs^2+pqr+pqs+prs-qrs$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq-rs)+pr(p-r)+ps(p-s)+qr(q+r)$

$+qs(q+s)+pqr+pqs+prs-qrs$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq-rs)+pr(p-q-r-s)+pr(q+s)$

$+ps(p-q-r-s)+ps(q+r)+qr(-p+q+r+s)+qr(p-s)$

$+qs(-p+q+r+s)+qs(p-r)+pqr+pqs+prs-qrs$

$=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq+pr+ps-rs)-qr(p-q-r-s)-$

$qs(p-q-r-s)+pqr+prs+pqs+prs+pqr-qrs+pqs-qrs+pqr+pqs+$

$prs-qrs$

所以，

$p^3-q^3-r^3-s^3=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq+pr+ps-qr-qs-rs)+$

$3(pqr+pqs+prs-qrs)$

看完這種方法，好處是不需要用圖解來因式分解，如果當我們因式分解 $p^3-q^3-r^3-s^3-t^3$ 或更多項的時候時，**你們會如何拆解呢?**

發現及規律

我們已經對三至四個項的恆等式有一定的認識，不如我們嘗試發現他們的規律吧！

減項的規律

三個項中，$p^3-q^3-r^3=(p-q-r)(p^2+q^2+r^2+pq+pr-qr)+3pqr$

四個項中，

$$p^3-q^3-r^3-s^3=(p-q-r-s)(p^2+q^2+r^2+s^2+pq+pr+ps-qr-qs-rs)+3(pqr+pqs+prs-qrs)$$

其實這兩條式是很相似的。

$(p-q-r)$中，只是差了$-s$ 這項，如果在 $p^3-q^3-r^3$ 中多了 $(-s)^3$ 這項，就會變成$(p-q-r-s)$；$(p^2+q^2+r^2+pq+pr-qr)$中，還缺少了$(s^2+ps-qs-rs)$，這些項都是包含了 s 這項，除了每個項都要自乘一次外$(p^2+q^2+r^2+s^2)$，其他項也要互相乘一次，但非全部項都是相加，**與 p 相乘的就是加項，相反，沒有 p 的項就是減項$(pq+pr+ps-qr-qs-rs)$。**

常數項中，但他們不需要自乘一次，但其他項仍要互相乘一次，四個項產生的項會比三個項較多，多了的項都是與 s 有關聯的$(ps-qs-rs)$，不同的是**與 p 相乘的也是加項，沒有 p 的項則是減項，還有，並不是一個項只出現一次，他們會出現三次** $3(pqr+pqs+prs-qrs)$，**請大家注意。**

相信大家也估計到五個或更多的項的規律，我就不需再多解釋，大家也需要發現加項的規律，其實分別不大，只是加減符號有一些改變，大家只是需要花多些時間，也會發現更多的規律，或許比我想的會更多。

稱爲恆等式的原因：大家可能都覺得這是因式分解，但因式分解是把兩個相加的項改寫成兩個表達式相乘，如 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y)$；但 $p^3+q^3+r^3$ 中多了 3pqr 這項，這並不是相乘的項，而是相加，當中雖然仍有因式分解的成份，但並不是完全改寫成兩個表達式相乘，所以我把它稱爲恆等式，大家千萬不要把恆等式看成因式分解！

感想

完成整份論文後，我要感謝兩位人士幫助我，我的數學老師—朱老師，因爲他是鼓勵我參加這個比賽。當初我對這個比賽沒有興趣，但當我問他這條問題(x,y,z 都是整數，$x^3+y^3+z^3=36$，尋找 x,y,z)時，我便問他$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$是否等於 0(那位同學利用$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ 等於 0 來找出答案)，但他卻不認同，我參加這個比賽的興趣就開始而來。而且圖片都是朱老師幫我掃描在電腦上。第二個是給予我靈感的人，或許大家覺得她好像沒有幫忙，但可能沒有她，這份論文也不會在這兒出現。我花了很多時間在這份論文中，希望大家能夠明白和用心思考這份報告，多謝。

完