相信大部份人對希爾伯特教授的幾何基礎的五組公理(關聯公理、順序公理、合同公理、連續公理及平行公理)並不熟識。關聯公理十分容易，相信不用多說；合同公理及連續公理則在我們讀幾何學的時候，也需要作出深入的探討；至於連續公理，初中的程度並不需要；而順序公理，則是一組我們常常用到，但卻被我們忽略了的公理。因此，本人選擇了在這裡深究這組公理。

以下是四條順序公理:

II_1　若點 B 介於兩點 A，C 之間，則 A，B，C 是直線上的互異點，且 B 也介於 C，A 之間。

II_2　對於任意兩點 A，B，直線 AB 上至少有一點 C 存在，使 B 介於 A，C 之間。

II_3　在共線三點中，一點介於其餘兩點之間的情況不多於一次。

II_4　設 A，B，C 是不共線的三點，a 是平面 ABC 上不通過 A，B，C 中任一點的一直線，則若 a 有一點介於 A，B 之間那末它必還有一點介於 A，C 之間或介於 B，C 之間。

本文也會用到 8 條關聯公理，故在此列明：

I_1　通過任意給定的兩點有一直線。

I_2　通過任意給定的兩點至多有一直線。

I_3　每一直線上至少有兩點；至少有三點不同在直線上。

I_4　通過任意給定的不共線三點有一平面；每一平面上至少有一點。

I_5　至多有一平面通過任意給定的不共線三點。

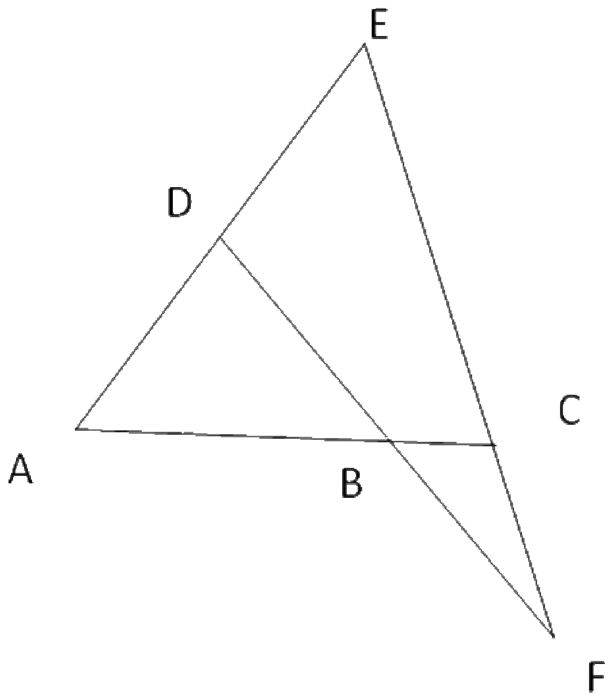
I_6　若直線 a 的兩點 A，B 在平面 α 上，則 a 上所有點都在 α 上，這時直線 a 稱爲在平面 α 上，或平面 α 通過或含有 a。

I_7　若兩平面有一公共點，則至少還有一公共點。

I_8　至少有四點不同在一平面上。

順序公理有何作用？先來看看幾個它所證明出來的其中一個定理:　對於任意兩點 A 、C ，直線 AC 上至少有一點 B 介於 A 和 C 之間。

證明: 根據 I_3，有點 D 不在 AC 上。根據 II_2，有點 E 使 D 在 A 和 E 之間，根據 I_1 ，把 E 和 C 聯起來，根據 II_2，有點 F 使 C 在 E 和 F 之間。根據 I_1 ，把 F 和 D 聯起來。根據 II_1 及 II_3，DF 不過 A 、C 、E 中任何一點，也不過 CE，那麼根據 II_4，DF 必與 AC 相交於一點 B。



可見，若沒有順序公理，我們仍然能把線延長，但不能在直線上的兩點中間作點。

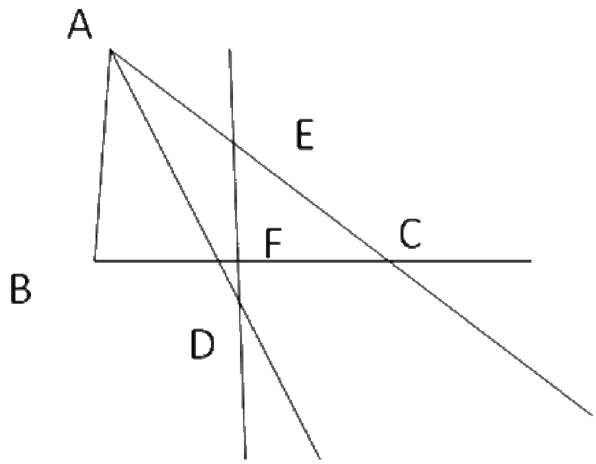
<u>特別聲明:除了本定理及公理同容外，其他內容皆由本人原創。</u>

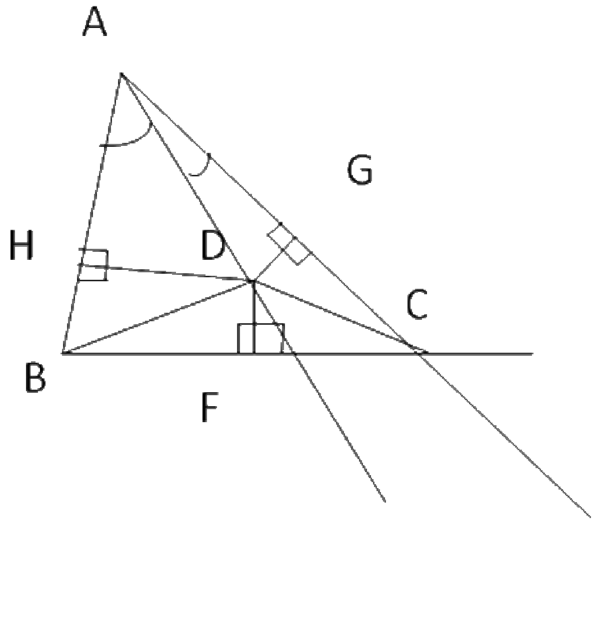
若沒有了順序公理，我說:凡三角皆是等邊的。

根據 I_1、I_3 、 I_4，以點 A 、B 、C 作平面 α ，且有點 F 在 BC 中間，平分 BC 。作直線 a 平分角 A 及作線 b 穿過 F ，垂直 BC ，並與 AC 交於 E。線 a 和 b 想交於 D 。由於沒有了順序公理，我可以說 D 在 FE 之間，則表示點 D 在三角形 ABC 內。

那麼根據 I_1、I_3 、 I_4 ，把 D 和 B 、D 和 C ，連起來，有三角形 ADC 、ADB 、DBF 及 DFC ，再有點 H 使 DH 連起來後垂直 AB ，及點 G 使 DG 連起來後垂直 AC ，形成三角形 ADG 、ADH 、 DHB 、DGC 。

由於 DF 是公共邊、BF=FC、角 DFB=角 DFC，三角形 DFB 全等於三角形 DFC(S.A.S.) 。那麼 DB=DC 。因爲角 HAD=角 GAD 、 DA 是公共邊、角 AHD=角 AGD ，三角形 ADH 全等於三角形 ADG(A.A.S.) 。因此，AG=AH ，DH=DG 。因 DH=DG 、 DB=DC 、角 DHB=角 DGC ，三角形 GDC 全等於三角形 HDB(R.H.S.)。那麼 GC=HB 。因爲 GC=HB ，AG=AH ，AC=AB 。同理可證，AC=BC 。續而證之凡角也是 60 度。





希爾伯特教授又把公理系統應滿足的基本條件歸納爲相容性、獨立性及完備性。相容性是一個公理系統必須擁有的，表示當中沒有矛盾。而獨立性因爲不會對系統的正確及適用產生影響，所以是非必要的。當一個公理系統具備獨立性，則表示該系統沒有多餘的公理。而當一個公理系統不可能增加任何其他一個公理，同時保持系統的相容性及獨立性，則代表這個系統是完備的。

順序公理的相容性

要證明該四條公理的相容性，憑空是不可能的，因此，會將它們製作成實數模型，以證明它們的相容性。

定義:

點: 坐標(x,y)

直線: 數組的比(a:b:c)

點在直線上: ax+by+c=0(aa+bb 不等於 0)

點(x_2，y_2)在點(x_1，y_1)和點(x_3，y_3)之間: $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} > 0$

II_1 若點 B 介於兩點 A，C 之間，則 A，B，C 是直線上的互異點，且 B 也介於 C，A 之間。

實數模型:

有三個坐標:(x_n，y_n)滿足:$ax_n+by_n+c=0$(aa+bb 不等於 0)(n=1,2,3)

若 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} > 0$

則 (x_1，y_1) 不等於 (x_2，y_2) 不等於 (x_3，y_3)

且 $\frac{x_2-x_3}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_3}{y_1-y_2} > 0$

證明:

前提: $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} > 0$

假設 (x_1，y_1)、(x_2，y_2)、(x_3，y_3)同時相等，

則 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} = \frac{0}{0} = 0$

不合理，則(x_1，y_1)、(x_2，y_2)、(x_3，y_3)不會同時相等

假設 $(x_1，y_1)=(x_2，y_2)$不等於$(x_3，y_3)$

則 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} - \frac{0}{x_3-x_2} - \frac{0}{y_3-y_2} = 0$

假設 $(x_1，y_1)=(x_3，y_3)$不等於$=(x_2，y_2)$ ，且三者不會同時相等

則 $x_1>x_2$或$x_1<x_2$， $y_1>y_2$或$y_1<y_2$

設 nx爲x_1，x_2的差， ny爲y_1，y_2的差

則 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} = \frac{nx}{-nx} = \frac{ny}{-ny} <0$

或 $- \frac{-nx}{nx} - \frac{-ny}{ny} <0$

不合理，則 $(x_1，y_1)$ 不等於 $(x_2，y_2)$ 不等於 $(x_3，y_3)$

II_2 對於任意兩點 A，B，直線 AB 上至少有一點 C 存在，使 B 介於 A，C 之間。

實數模型:

若有 $(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$ $((x_1，y_1)$不等於$(x_2，y_2))$

則有$(x_3，y_3)$，使 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} - \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} >0$

證明: 若 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} - \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} =g>0$

則必有第三坐標$(x_2+\frac{x_2-x_1}{g}，y_2+\frac{y_2-y_1}{g})$

II_3　在共線三點中，一點介於其餘兩點之間的情況不多於一次。

實數模型: 下列三條數式中，只有一條成立。

$$\frac{x_1-x_2}{x_3-x_1} = \frac{y_1-y_2}{y_3-y_1} > 0$$

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} > 0$$

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_3} > 0$$

證明:　　若第一條式成立，則 $x_3 > x_2 > x_1$ 或 $x_3 < x_2 < x_1$ ， $y_3 > y_2 > y_1$ 或 $y_3 < y_2 < y_1$

則 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} < 0$ 及 $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_3} > 0$

同理可證，三條中只有一條成立。

II_4　設 A，B，C 是不共線的三點，a 是平面 ABC 上不通過 A，B，C 中任一點的一直線，則若 a 有一點介於 A，B 之間那末它必還有一點介於 A，C 之間或介於 B，C 之間。

實數模型:　　若有有三個坐標:(x_n，y_n)　，且只有(x_1，y_2)和(x_2，y_2)滿足 $ax_n+by_n+c=0$(aa+bb 不等於 0)(n=1,2,3)
以及坐標:(x，y)　，及另一數組比(v:w:z)　，使 vx+wy+z=0(vv+ww 不等於 0)，但 vx_n+wy_n+z 不等於 0。

$$\text{且}\quad \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} > 0$$

則　$(vx_1+wy_1+z)(vx_2+wy_2+z)<0$
則有 $(vx_3+wy_3+z)(vx_2+wy_2+z)<0$ 或　$(vx_3+wy_3+z)(vx_1+wy_1+z)<0$

註:實數模型表示了有不共線的三點及 a(v:w:z)與 AB(a:b:c)相交的點的坐標(x,y)　。而$(vx_1+wy_1+z)(vx_2+wy_2+z)<0$ 則說明了線段 AB 在線 a 的異側(線 a 與線段 AB 相交，說得易明一點，則線 a 把該平面分爲兩半，若 A 和 B 一點在同一半，則它們在 a 的同側，相反，若 B 在另一半，則 AB 聯起來的線會與 a 相交。回到數式上，則若 a 把平面分開了 p、q 兩面，若 vx+wy+z<0 則該點在面 p，若 vx+wy+z>0，則表示該點在面 q　，因此若$(vx_1+wy_1+z)(vx_2+wy_2+z)<0$　，則兩個括號內的數有一個是負數，另一個是正數，代表該兩點在 a 的異側。)　，而它們相交於點(x　，y)　，令該點在 AB 之間，並進入平面 ABC　。這樣的話，則 AC 或 BC 必在 a 的異側(與 AC 或 BC 相交)　。

證明:爲方便計算，設(vx_1+wy_1+z)爲 a　，(vx_2+wy_2+z)爲 b　，　$(vx_3+wy_3+z)(vx_1+wy_1+z)$爲 c
若 ab<0　，則 a>0　，b<0 或 a<0　，b>0
先假設 a>0　，b<0
若 c>0(a　、b　、c 也不等於 0　，前面提過)
則 bc<0
若 c<0
則 ca<0
同理可證，若$(vx_1+wy_1+z)(vx_2+wy_2+z)<0$，則有$(vx_3+wy_3+z)(vx_2+wy_2+z)<0$ 或 $(vx_3+wy_3+z)(vx_1+wy_1+z)<0$

本人已被它的相容性弄得神智不清，畢竟是個初中生，若要再長篇大論驗證它的獨立性及完備性，實在無從入手。

其實，我認爲順序公理還有不少改善的空間(要建立一個真正完美的公理系統還真是很難呢!) 。首先，我認爲它的定義有點不足:什麼叫之間?若不清楚之間的定義，我會對順序公理的第一條產生疑惑，究竟若 B 在 A 和 C 之間，它們是互異點這句說話有什麼作用呢?我又問:若沒有了這句，若 A、B、C 是同一點，那麼 B 在 AC 之間這句說話又可否成立呢?

此外我看過第四條順序公理後，我會問(我常常問自己問題的…):這是 a 不經 ABC 三點的情況，那麼若 a 經過 ABC 其中一點，又會怎樣呢?

總括而言，做數學的一定要追求完美，步步小心謹慎。究竟將來會否有一個真正完美的公理系統出現呢?