

分油問題

相信大家都聽過這個故事：有一天，韓信騎著馬外出，在城外看到兩個人吵架，一問之下才知道他們為平分 10 公斤油而爭吵，他們只有盛 3 公斤和 7 公斤的器皿，怎樣分得出 5 公斤呢？結果，韓信用了很短時間，就解決了這問題了。究竟他用了甚麼辦法呢？這遲點討論，先看看較簡單的題目吧！

1. 一天，某人想在河邊打 1 公斤水，但他只有一個盛 2 公斤和一個盛 5 公斤的器皿，他如何能獲得 1 公斤水呢？

答：不難想到，1, 2, 5 之間的關係， $5-2*2=1$ ，所以，答案是先盛 5 公斤水，把水倒進 2 公斤容器，把 2 公斤容器的水倒掉，再把水從 5 公斤容器倒進 2 公斤容器，就得出 1 公斤了。

說回韓信的問題，我們想要 5 的出現，我們既然有盛 3 公斤的器皿，就盡量做出 2 公斤油吧！首先，我們把油倒進 3 公斤的器皿，然後把盛 3 公斤器皿內的油倒進 7 公斤器皿，重複以上動作一次，現在，7 公斤的器皿中有 6 公斤油，只要多 1 公斤油就滿了， $3-1$ 不就等於 2 嗎？所以把 3 公斤器皿再次盛滿，再倒進 7 公斤器皿中，就得到 2 公斤油，把 7 公斤器皿中的油倒進本來盛油的器皿(10 公斤)，把那 2 公斤油倒進 7 公斤，再裝滿 3 公斤油，倒進 7 公斤器皿，就有了 5 公斤油了！

容器		
3kg	7kg	10kg
0	0	10
3	0	7
0	3	7
3	3	4
0	6	4
3	6	1
2	7	1
2	0	8
0	2	8
3	2	5
0	5	5

通過以上的 2 個例子，我們可以知道，只要了解各數字的關係，就能使這些題目變得更容易，但，所有這類的題目都有解嗎？請看以下例子：

現在有盛 3 公斤和盛 6 公斤的器皿，怎樣在 10 公斤油中分出 5 公斤嗎？

答：不可能，由於 3 和 6 都是 3 的倍數，而 10 餘 3 的餘數為 1，5 餘 3 的餘數為 2，因此不可能分出 5 公斤油。

由此可見，不是所有組合都能從特定數目 b 中分出目標數 a ，設一容器盛 n 公斤，另一容器盛 m 公斤，

m 和 n 必定要互質(除了目標數 $a=(b-m-n)$ or $(b-n)$ or $(b-m)$ or $(a$ 是 m 和 n 的 GCD 的倍數))。

爲何呢？因爲我們能列一方程：

$$mx+ny = a$$

設 c 爲 m 和 n 的 GCD，

$$c[(m/c)x+(n/c)y]=a，$$

由於 a 不是 c 的倍數，

方程不成立，

m 和 n 必須互質。

m 和 n 必須要互質，但互質一定有解嗎？首先，我們要知道當 m 和 n 互質，必定找到一對整數 x, y 使 $mx+ny=1$ 成立(稍後證明)，這樣， $a(mx+ny)=a$ ，不就一定可以分出 a 公斤油嗎？不一定！

情況一： $m+n < a$ ，

在這情況下，除非 $a=(b-m)$ or $(b-n)$ or $(b-m-n)$ ，否則沒有容器能盛 a 公斤的油。

情況二： $m+n > b$ ，

在這情況下，雖然容器能盛 a 公斤的油，但可能會在倒油的過程中因油的不足而做不到目標數，所以這只能做到當 $a \leq (b-m)$ or $(b-n)$ or $a \leq (m-n)$ 。

情況三： $a \leq m+n \leq b$ ，

這是可以做到的，既能盛下 a 公斤的油，又不會因油不足而做不到。

只差最後一步就解決整道問題了，就是為何 $mx+ny=1$ 必定有整數解呢？以下是證明步驟：

由於 m 和 n 互質，他們的 GCD 為 1，

所以我們要證明有一對整數 x, y 使 $mx+ny=\text{gcd}(m, n)$

設 $m > n$

設 $k = \text{gcd}(m, n)$

若 m 能被 n 整除， $m = pn$

$m + (1-p)n = n = \text{gcd}(m, n)$

在這情況下，我們可取 $x=1, y=(1-p)$

要知道，我們可以輾轉相除法求兩數 (m, n) 的 GCD，

就是不斷重複把新求的餘數除本來為細的數(一開始為 m 除以 n)，

Euler (m, n) 為要相除的次數，

設 Euler (m, n) 為 t

設所有 Euler 少於 t 的數組都被確立，

根據餘數定理，我們可得出：

$$m = pn + q$$

由於 $m = n \pmod{k}$

所以 $n = pn + q \pmod{k}$

所以 $q = n \pmod{k}$

因此 $\text{gcd}(n, q) = \text{gcd}(m, n)$

Euler(n,q)=t-1(已相除一次)

$$nu+qv=\gcd(n,q)$$

由於 $m=pn+q$

i.e. $q=m-pn$

所以 $nu+qv=nu+(m-pn)v$

$$nu+qv=mv+n(u-pv)=\gcd(n,q)=\gcd(m,n)$$

所以只要取 $x=v, y=(u-pv)$,

$$mx+ny=1$$

所以當 m,n 互質，且 $a \leq m+n \leq b$ ，就能分到 a 公斤的油。

分油問題是一個富有趣味的遊戲，閒時可玩玩消遣，打發時間，若仍然不能滿足你，試研究一下背後的數學！

參考資料：

<http://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml>