翻幣遊戲

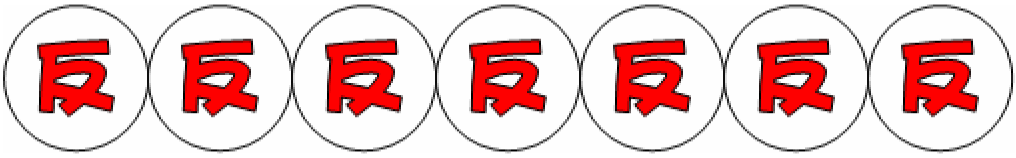
一天小君在餐廳中碰見了小韓，小君見小韓沒精打采樣子，便拿出 13 個金幣並跟他說：「這裏有 13 個金幣，我先把它們呈反面狀態，如果你能每回合翻 4 個金幣而每次又沒有翻相同的金幣，而把所有金幣翻成正面，所有金幣就歸你吧！否則，我這餐就入你帳了。」小韓見條件吸引，想也沒想就答應了。可憐的小韓翻來翻去也翻不到全部金幣成正面，結果小韓當然便替小君付午餐的錢了。

翻幣遊戲是一種單人的數學遊戲。遊戲先定一個金幣數目，所有金幣呈反面的狀態。遊戲者必先限定一個每回合翻幣數目（必須比金幣數目少），在每回合翻幣時，必須翻限定數目的金幣數，而且每回合不可以重複翻同一顆金幣。遊戲目的是把所有金幣也翻成呈正面的狀態。如沒有金幣在手，其實只要隨便取用一些可辨識正反兩面的物件，如錢幣、棋子、紙牌等等，亦可以用來進行遊戲。

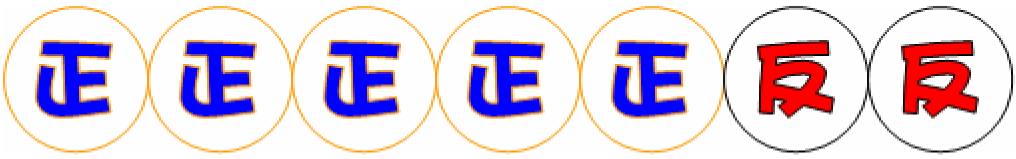
玩過之後，你可能會發現有時翻來翻去也很難完成遊戲，有時更要花上半天的精力才能完成任務，以下就會揭曉箇中的奧妙之處！

例子：假設有 7 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 5 顆金幣。

（起始狀態，7 個金幣呈反面）

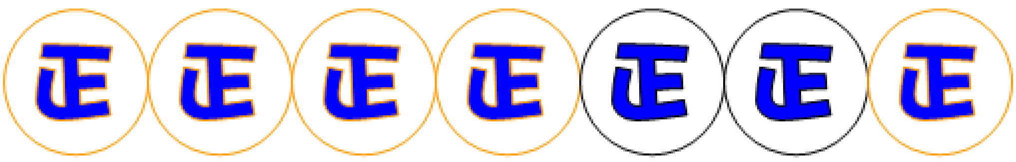


（把其中 5 顆金幣翻成「正面」）



（把 4 顆「正面」的金幣翻成「反面」，並把 1 顆「反面」的金幣翻成「正面」）

（把剩餘的 5 顆反面的金幣也翻成正面，遊戲完結）



在以上這個例子中，將所有金幣由「反面」翻成「正面」可以這樣記錄：

7(-5)2(+3)5(-5)0

沒有括號的部分（即紅色的部分）是指當時剩下「反面」金幣的數目，所以第 1 個「紅色的部分」必須是總金幣數，而最後一個必須是 0（即完成遊戲）。而「藍色的部分」就是每回合增加或減少「反面」金幣的數目。因爲限定翻幣數目爲 5，因此有下列幾種組合來使每回合增加或減少「反面」金幣數目：（後簡稱增減值）

-5：把 5 顆「反面」翻成「正面」
必須擁有 5 顆至 7 顆的「反面」金幣。

-3：把 4 顆「反面」翻成「正面」，把 1 顆「正面」翻成「反面」
必須擁有 4 顆至 6 顆的「反面」金幣。
（7 顆不足夠使 1 顆「正面」金幣翻成「反面」）

-1：把 3 顆「反面」翻成「正面」，把 2 顆「正面」翻成「反面」
必須擁有 3 顆至 5 顆的「反面」金幣。
（６顆至 7 顆不足夠使 2 顆「正面」翻成「反面」）

+1：把 2 顆「反面」翻成「正面」，把 3 顆「正面」翻成「反面」
必須擁有 2 顆至 4 顆的「反面」金幣。
（5 顆至 7 顆不足夠使 3 顆「正面」翻成「反面」）

+3：把 1 顆「反面」翻成「正面」，把 4 顆「正面」翻成「反面」
必須擁有 1 顆至 3 顆的「反面」金幣。
（4 顆至 7 顆不足夠使 4 顆「正面」翻成「反面」）

+5：把 5 顆「正面」翻成「反面」
必須擁有 0 顆至 2 顆的「反面」金幣。
（3 顆至 7 顆不足夠使 5 顆「正面」翻成「反面」）

對於所有正整數 k，增減值的組合爲 k-0, (k-1)-1, (k-2)-2,…,[k-(k-1)]-(k-1) ,(k-k)-k
即 k, k-2, k-4,…,-(k-2),-k

將此寫一數列，第 i 項爲 k-2(i-1) 而數列只有 k+1 項

以上的例子可得出幾點：　若金幣總數是 n 顆，每回合翻幣數限定爲 k 顆

- 選擇哪一顆金幣與結果及過程是沒有關係的。
  因爲遊戲的關鍵是在於「反面」金幣數目的增減。

- 若前一次「反面」的增減值爲 p 顆 ，則下一次「反面」的增減值不得爲–p 顆 ，否則這兩次翻幣是沒意義而且可以省略的。

- 因遊戲規則爲 n＞k，必須最少 2 次才能使「反面」數減至 0。

- 遊戲一開始必要翻增減值爲–k 的金幣數，因爲除了增減值–k 以外，其他增減值皆需要擁有「正面」的金幣，遊戲一開始沒有「正面」的金幣，因此必需翻增減值爲–k 的金幣數目。

- 遊戲最後也必要翻增減值爲–k 的金幣數，因爲除了增減值–k 以外，其他增減值也必會使「正面」的金幣翻成「反面」，這樣便不能完成遊戲。

我們再看一看另外的例子：　當 k＝2 時,　增減值可以是+2 , +0 ,-0 ,-2

總金幣數(n)	翻幣記錄	次數(s)
3	3(-2)1……	∞
4	4(-2)2(-2)0	2
5	5(-2)3(-2)1……	∞
6	6(-2)4(-2)2(-2)0	3

- 由此可見，若 n 是奇數而 k 是偶數的話，這命題是無意義的。這是因爲 k 是偶數時，所有增減值必定爲偶數（因 k 是偶數，而增減值的公項爲 k-2(i-1)，因此所有增減值的組合必爲偶數）由於所有增減值是偶數，所以對於所有奇數 n 時，必定不能以偶數的增減值使「反面」金幣數翻成 0。

以下將會先探討一下 k 爲偶數的情況。要留意的是，當 k 爲偶數的情況下，n 也必定爲偶數，命題才能成立。

情況 1 ---------- n 爲 k 的倍數：

- s＝n/k，其中 s 爲最小值
- 每回合需翻增減值爲–k 顆金幣

例子：假設有 100 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 20 顆金幣。
n＝100
k＝20

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	100	/
1	20	80	-k (-20)
2	40	60	-k (-20)
3	60	40	-k (-20)
4	80	20	-k (-20)
5	100	0	-k (-20)

s＝n/k＝5
翻幣記錄：100(-20)80(-20)60(-20)40(-20)20(-20)0

情況 2 ---------- $n=km+t$, m 爲正整數且 $m\geqq 2$, t 爲正整數且 $t<k$：

- 第一次翻幣後，「反面」的金幣數目爲 $n-k$，而「正面」金幣數目爲 k
  由於「反面」數目爲 $k(m-1)+t$ 且 $m-1\geqq 1$，因此「反面」金幣數目 $\geqq k+t$
  因爲所有增減值最多只需擁有 k 顆「反面」或 k 顆「正面」
  現在「正面」數目 $=k$ 和「反面」數目 $\geqq k+t$ 皆 $\geqq k$
- 所以擁有足夠的「反面」與「正面」，能翻出所有可能性增減值的金幣數。
  因爲 n 爲偶數，而 k 亦是偶數，使 mk 爲偶數，因此 t 爲偶數
  且 $t<k$，所以必存在一個正整數 i 使 $k-2(i-1)=-t$
  令第二次翻幣必定能翻增減值爲 $-t$ 的金幣數
- 第 2 次翻幣後「反面」數目爲 $k(m-1)$顆，
  因此再翻 $m-1$ 次增減值爲 $-k$ 的金幣數就能完成遊戲。
- 所以 $s=(1)+(1)+(m-1)=m+1$
  在 $s=m+1$ 中 s 必爲最小值
  因若 $s<m+1$ 中 m 爲正整數，寫成 $s\leqq m$ 的話
  s 回合後「反面」數目 $=(m-s)k+t$
  $(m-s)k$ 的最小值 $=0$，所以 s 回合後「反面」數目的最小值爲 t
  而 t 爲正整數($t>0$)，不能滿足條件「反面」數目 $=0$
  所以 $s\leqq m$ 沒可能完成遊戲
  因此 $s=m+1$ 中 s 爲最小值。

例子：假設有 100 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 30 顆金幣。

$100=30*3+10$

$n=100$

$k=30$

$m=3$

$t=10$

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	100	/
1	30	70	-k (-30)
2	40	60	-t (-10)
3	70	30	-k (-30)
4	100	0	-k (-30)

$s=m+1=4$

翻幣記錄：100(-30)70(-10)60(-30)30(-30)0

情況 3 ---------- n＝km＋t , m＝1, t 為正整數且 t＜k：

- 第一次翻幣-k 顆後，「反面」金幣數目減至 km+t-k ，即 t 顆。
  「正面」金幣數目為 km+t-t 顆，即 k 顆。
  其中 k+t＝n。

- 第二次翻幣要盡可能使「反面」金幣數目變為 k 顆，
  使第三次翻增減值為 - k 顆的金幣時便能完成遊戲

  所以必需嘗試翻增減值為 k-t 顆的金幣數目
  k＞t，所以 k- t＞0
  即「正面」翻成「反面」的數目 大於「反面」翻成「正面」的數目
  設「正面」翻成「反面」的數目為 a+k-t 顆，
  「反面」翻成「正面」的數目則為 a 顆
  因翻幣數目限定為 k 粒，
  $a + (a+ k - t) = k$
  $2a = t$
  $a = t/2$
  所以「正面」翻成「反面」的數目為 k-t/2 顆，
  「反面」翻成「正面」的數為 t/2 顆
  （因 t 必是偶數，所以 t/2 必定是整數）
  現時擁有的「正面」金幣數大於需要翻成「反面」的「正面」金幣數（k＞k – t/ 2），而且現時擁有的「反面」金幣數大於需要翻成「正面」的「反面」金幣數（t＞t/2）

  所以第二次翻增減值為(k-t)的金幣數目滿足所有條件

- 第二次翻幣後剩 k 顆，接下來第三次翻幣，亦是最後一次翻幣，只要翻增減值為 -k 顆的金幣數目就能完成遊戲

- s＝1＋1＋1＝3
  在 s＝3 中 s 必為最小值
  因為遊戲最少要 2 次翻幣才能勝出，
  而這 2 次翻必須也是翻增減值為 -k 的金幣數目
  在這情況中，並不能翻 2 次翻增減值為 -k 的金幣數目來使「反面」金幣數目減至 0
  （翻 2 次後，「反面」金幣數目會變為 -k+t，其中 k＞t，即「反面」金幣數目會小於 0，因此不成立）
  因此 s＝3 中 s 必為最小值

例子：假設有 100 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 60 顆金幣。

100＝60*1＋40
n＝100
k＝60
m＝1
t＝40

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	100	/
1	60	40	-k (-60)
2	40	60	k-t (+20)
3	60	0	-k (-60)

s＝3
翻幣記錄：100(-60)40(+20)60(-60)0

以下再探討 k 爲奇數的情況。因 k 爲奇數的奇況下，n 可以是任何大於 k 的正整數，因此必需考慮某些偶數及奇數的性質，使翻幣數能設合剩餘金幣數的奇數或偶數的性質，令遊戲得以完成。

情況 1 ---------- n 爲 k 的倍數：

這情況與 k 爲偶數的情況 1 相似

- s＝n/k，其中 s 爲最小值
- 每回合需翻增減值爲–k 顆金幣

例子：假設有 135 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 27 金幣。
n＝135
k＝27

回合	正 數目	反 數目	增減值
起始	0	135	/
1	27	108	-k (-27)
2	54	81	-k (-27)
3	81	54	-k (-27)
4	108	27	-k (-27)
5	135	0	-k (-27)

s＝n/k＝5
翻幣記錄：135(-27)108(-27)81(-27)54(-27)27(-27)0

情況 2 ---------- n＝km + t , m 爲正整數, t 爲偶數且 2≦t＜k：

在 m＞1 的情況下：

- 第一次翻幣後，「反面」金幣數爲 n-k 顆，而「正面」金幣數爲 k 顆

- 因 m＞1 且 m 爲正整數，
  所以 n≧2k+t
  n-k＞k

  爲了完成遊戲，要設法將「反面」金幣數變爲 k(m-1)顆
  必須翻增減值爲 - [n-k – k(m-1)]＝-(n-k- km+k)＝km-n 的金幣數
  因 n＝km + t 中 t 爲偶數
  所以 n – km＝t
  km – n＝-t 中，t 是偶數，即 km-n 爲偶數的負值

  因爲 km-n 爲偶數的負值，而因在 k 爲奇數時，
  其增減值的組合必定是奇數
  因此沒法在一次翻幣中將「反面」金幣數變爲 k(m-1)顆

  因此盡可能需嘗試以 2 次增減值爲奇數的翻幣數，
  使「反面」金幣數變爲 k(m-1)顆。
  所以可以考慮試試先翻增減值爲 -1，再翻增減值爲 km-n+1 的金幣數

- 第二次翻增減值爲 -1 的金幣數。
  即翻$(k+1)/2$ 顆「反面」金幣和$(k-1)/2$ 夥的「正面」金幣合共翻 k 夥金幣
  (k 爲奇數時，$(k+1)/2$ 與$(k-1)/2$ 也是整數)
  因現時擁有的「反面」金幣數爲 $n-k > k$
  $n-k > (k+1)/2$
  因此有足夠的「反面」金幣翻成「正面」

  現時擁有的「正面」金幣數爲 $k > (k-1)/2$
  因此有足夠的「正面」金幣翻成「反面」
  所以第二次翻增減值爲 -1 的金幣數滿足所有條件。

- 第三次翻增減值爲 $km-n+1$ 的金幣數。
  現時擁有的「正面」金幣數爲 $k+1$ 顆，「反面」金幣數爲 $n-k-1$ 顆
  「正面」金幣數 $k+1 > k$
  $k+1 \geqq k$
  「反面」金幣數 $n-k-1 > k-1$，因 k 必定是整數的關係
  $n-k-1 \geqq k$
  因「正面」及「反面」的金幣數亦$\geqq k$ 顆
  所以能翻出所有增減值組合的金幣數，包括增減值爲 $km-n+1$ 的金幣數

  所以第三次翻增減值爲 $km-n+1$ 的金幣數滿足所有條件

- 現在擁有的「反面」金幣數爲 $k(m-1)$
  只要翻 $m-1$ 次，每次翻增減值爲 $-k$ 的金幣數便能完成遊戲。

- $S=(1)+(1)+(1)+(m-1)=m+2$
  在 $s=m+2$ 中，s 必爲最少值
  因在 $s \leqq m$ 的情況下，就算每次翻增減值爲$-k$
  也不能使「反面」的金幣數變成 0

  而在 $s=m+1$ 的情況下，1 次奇數增減值必不能翻偶數數目的金幣
  因此也不成立。

  所以在 $s=m+2$ 中，s 必爲最小值 。

例子：假設有 53 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 7 顆金幣。

53＝7*7 + 4
n＝53
k＝7
m＝7
t＝4

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	53	/
1	7	46	-k (-7)
2	8	45	-1 (-1)
3	11	42	km-n+1 (-3)
4	18	35	-k (-7)
5	25	28	-k (-7)
6	32	21	-k (-7)
7	39	14	-k (-7)
8	46	7	-k (-7)
9	53	0	-k (-7)

s＝m+2＝9

翻幣記錄：53(-7)46(-1)45(-3)42(-7)35(-7)28(-7)14(-7)7(-7)0

在 m＝1 的情況下：

這情況與 k 爲偶數下的情況 2 相似。

- 因 n＝k+t，所以
  第一次翻幣後，「反面」金幣數爲 n-k＝t 顆，而「正面」金幣數爲 k 顆

- t 爲偶數，而 k 爲奇數，因此 n 必爲奇數

- 爲了完成遊戲，因此要設法使「反面」金幣數變成 k 顆
  故此要盡可能翻增減值爲 k-t 的金幣數目

  因此第二次翻幣要翻「正面」金幣數 k-t/2 顆和
  「反面」金幣數 t/2 顆
  （t 爲偶數，因此 t/2 必爲整數）

  因現時擁有的「正面」金幣數目爲 k＞k-t/2
  現時擁有的「反面」金幣數爲 t＞t/2

  因此第二次翻增減值爲 k-t 的金幣數目數滿足所有條件

- 現時擁有的「反面」金幣數爲 k 顆
  因此第三次翻幣只要翻增減值爲 -k 的金幣數就能完成遊戲

- s＝1＋1＋1＝3＝k+2
  s＝m+2 中 s 必爲最小值
  因爲遊戲最少要 2 次翻幣才能勝出，
  而這 2 次翻必須也是翻增減值爲 -k 的金幣數目
  在這情況中，並不能翻 2 次翻增減值爲 -k 的金幣數目來使「反面」金幣數目減至 0
  （翻 2 次後，「反面」金幣數目會變爲 -k+t，其中 k＞t，即「反面」金幣數目會小於 0，因此不成立）

  因此 s＝3＝m+2 中 s 必爲最小值

例子：假設有 53 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 47 顆金幣。

53＝47*1 + 6
n＝53
k＝47
m＝1
t＝6

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	53	/
1	47	6	-k (-47)
2	6	47	k-t (+41)
3	53	0	-k (-47)

s＝m+2＝3

翻幣記錄：53(-47)6(+41)47(-47)0

因此，在情況 2 中，s 的最小值爲 m+2

情況 3 ---------- n＝km + t , m 爲正整數, t 爲奇數且 t＜k：

在 m＞1 的情況下：

- 第一次翻幣後，「反面」金幣數爲 n-k 顆，而「正面」金幣數爲 k 顆

- 因 m＞1 且 m 爲正整數，
  所以 n≧2k+t
  n-k＞k
  爲了完成遊戲，第二次翻幣要設法將「反面」金幣數變爲 k(m-1)顆
  必須翻增減值爲 - [n-k – k(m-1)]＝-(n-k- km+k)＝km-n 的金幣數

  因現時擁有的「正面」金幣數爲 k 顆
  而現在擁有的「反面」金幣數爲 n-k＞k 顆

  因「正面」及「反面」的金幣數亦≧k 顆
  所以能翻出所有增減值組合的金幣數，包括增減值爲 km-n 的金幣數

  第二次翻幣翻增減值爲 km-n 的金幣數數滿足所有條件。

- 現在擁有的「反面」金幣數爲 k(m-1)顆
  因此只需要每回合翻增減值爲–k 的金幣數目，翻 m-1 回合就完成遊戲

- s＝(1)+(1)+(m-1)＝m+1
  s＝m+1 中 s 必爲最小值
  因在 s＜m+1 因 m 是正整數，即 s≦m 的情況下
  就算每回合翻增減值爲-k 的金幣數，翻 m 回合後，
  「反面」金幣的數目爲 n-km=t，t＞0 顆，並不能完成遊戲

  因此 s＝m+1 中 s 必爲最小值。

例子：假設有 53 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 7 顆金幣。

54＝7*7 + 5

n＝54

k＝7

m＝7

t＝5

回合	正數目	反數目	增減值
起始	0	54	/
1	7	47	-k (-7)
2	12	42	km-n (-5)
3	19	35	km-n+1 (-3)
4	26	28	-k (-7)
5	33	21	-k (-7)
6	40	14	-k (-7)
7	47	7	-k (-7)
8	54	0	-k (-7)

s＝m+1＝8

翻幣記錄：54(-7)47(-5)42(-3)35(-7)28(-7)21(-7)14(-7)7(-7)0

在 m＝1 的情況下：

- 在 m＝1 的情況下，限制比之前所見的情況明顯地多了
  例如因 m＝1，在增減值的組合上有明顯金幣限制
  而且因 k 是奇數，m＝1 且 t 亦爲奇數，n 爲偶數
  因 k 爲奇數時其增減值也必爲奇數
  但正因爲 n 爲偶數，k 要設法以 2 次或以上的翻幣來使
  「反面」金幣數剩餘 k 個來完成遊戲。
  此情況明顯比之前的情況都要複，
  但在這裏儘管先試試以一般的方法來解決這問題。

- 第一次翻幣後，「反面」金幣數爲 n-k 顆，而「正面」金幣數爲 k 顆

- 爲了完成遊戲，要設法將「反面」金幣數變爲 k 顆
  n＝k+t 且 t＜k，所以 n-k＝t
  n-k＜k
  而且 n＝k+t 中，t 爲奇數，k 爲奇數，因此 n 必爲偶數

  必須翻增減值爲 [k - (n-k)]＝2k-n 的金幣數
  因 2k-n 中 k 爲奇數，n 爲偶數
  因此增減值 2k-n 必爲偶數增減值

  正因爲 2k-n 爲偶數，而因在 k 爲奇數時，其增減值的組合必定是奇數
  因此沒法在一次翻幣中將「反面」金幣數變爲 k 顆

  因此盡可能需嘗試以 2 次增減值爲奇數的翻幣數，
  使「反面」金幣數變爲 k 顆。
  所以可以考慮試試先翻增減值爲 +1，再翻增減值爲 2k-n-1 的金幣數

  要翻增減值爲+1 的金幣數，必要翻(k+1)/2 的「正面」金幣數
  及(k-1)/2 的「反面」金幣數。

  現時擁有的「正面」金幣數爲 k 顆，因 k 爲奇數時
  k≧(k+1)/2，因此擁有足夠的「正面」金幣數翻(k+1)/2 顆「正面」金幣

  現時擁有的「反面」金幣數爲 n-k 顆＜k 顆
  現時需要翻(k-1)/2 的「反面」金幣數，但可惜的是
  (k-1)/2 未必少於 n-k，因此不一定能夠擁有足夠的「反面」金幣數……

  怎麼辦呢？　沒頭緒之下，不妨一切從簡，來看看一些例子吧！

總金幣數(n)	限定翻幣數(k)	翻幣記錄	次數(s)
8	7	8(-7)1(+5)6(-3)3(+1)4(+1)5(-3)2(+5)7(-7)0	8
10	9	10(-9)1(+7)8(-5)3(+3)6(-1)5(-1)4(+3)7 (-5)2(+7)9(-9)0	10
12	11	12(-11)1(+9)10(-7)3(+5)8(-3)5(+1)6(+1)7 (-3)4(+5)9(-7)2(+9)11(-11)0	12
14	11	14(-11)3(+5)8(-1)7(-1)6(+5)11(-11)0	6
14	13	14(-13)1(+11)12(-9)3(+7)10(-5)5(+3)8 (-1)7(-1)6(+3)9(-5)4(+7)11(-9)2(+11)13(-13)0	14
16	13	16(-13)3(+7)10(-1)9(-3)6(+7)13(-13)0	6
18	13	18(-13)5(+3)8(+5)13(-13)0	4
18	15	18(-15)3(+9)12(-3)9(-3)6(+9)15(-15)0	6
20	17	20(-17)3(+11)14(-5)9(+1)10(+1)11(-5)6 (+11)17(-17)0	8
22	17	22(-17)5(+7)12(-1)11(-1)10(+7)17(-17)0	6
24	17	24(-17)7(+5)12(+5)17(-17)0	4
24	21	24(-21)3(+15)18(-9)9(+3)12(+3)15 (-9)6(+15)21(-21)0	8
26	21	26(-21)5(+11)16(-3)13(-3)10(+11)21(-21)0	6
28	21	28(-21)7(+7)14(+7)21(-21)0	4

從以上的例子中，會否發現一些特殊規律或特徵變化？

- 在總金幣數 n 且限定翻幣數 k 符合條件 n＝k+1 時
  如 n 爲 4 的倍數時，翻幣記錄爲 -m、+(m-2)、-(m-4) 、.....、+1、+1、.....、-(m-4)、+(m-2)、-m
  如 n 不爲 4 的倍數時，翻幣記錄爲 m、+(m-2)、-(m-4) 、.....、-1、-1、.....、-(m-4)、+(m-2)、-m
  且 s＝n。

- 每個翻幣記錄，除了最接近中間的即第(s+1)/2 及第(s-1)/2 個增減值外其餘的也會有對稱性質。第 i 個增減值會對應其 s-i+1 個增減值。
  且 s 必爲偶數。

發現以上特徵後，亦不難發現在相同的 k 中若 t 越大，s 越小
在相同的 t 中，若 k 越大，s 越大

因此會發現 s 與 k/t 的關係爲
s 爲偶數且符合 $s-3 < k/t \leq s-1$

發現這關係後，遊戲秘訣亦不難找出。

以下爲一例子：假設有 36 顆反面的金幣，限定每回合必須翻 33 金幣。

36＝33*1+3
n＝36
k＝33
t＝3
s＝12

第幾次翻幣	翻幣記錄	解釋
1、12	36(-33)3……33(-33)0	首尾的翻幣必定是翻增減值爲-k 即-33 的金幣數
2、11	36(-33)3(+27)30……6(+27)33(-33)0	要選「反面」金幣即 3 顆，再選餘下的「正面」金幣 33-3 顆，即 30 顆增減值爲 30-3＝27
3、10	36(-33)3(+27)30(-21)9…… 27(-21)6(+27)33(-33)0	要選「正面」金幣即 6 顆，再選餘下「反面」的金幣即 33-6=27 顆增減值爲 6-27＝-21
4、9	36(-33)3(+27)30(-21)9(+15)24…… 12(+15)27(-21)6(+27)33(-33)0	要選「反面」金幣即 9 顆，再選餘下的「正面」金幣 33-9 顆，即 24 顆增減值爲 24-9＝15
5、8	36(-33)3(+27)30(-21)9(+15)24(-9)15…… 21(-9)12(+15)27(-21)6(+27)33(-33)0	要選「正面」金幣即 12 顆，再選餘下「反面」的金幣即 33-12=21 顆增減值爲 12-21＝-9

6、7	36(-33)3(+27)30(-21)9(+15)24(-9)15(+3)18(+3)21(-9)12(+15)27(-21)6(+27)33(-33)0	因這次是最後 2 次翻幣，不必符合對稱性，因此必要想法以 2 次翻幣將「反面」金幣數由 15 增至 21，由選擇+3、+3 或+1、+5 或+5、+1，但因只有前者能有足夠的「正面」及「反面」金幣數，因此增減值爲+3、+3

總結

翻幣遊戲其實是一種能千變萬化的遊戲，若能加一點心思，例如設定每回合翻幣數梅花間竹爲不同的數目，遊戲必定更能發揮光彩之處。希望你能在遊戲之餘，啓發不同邏輯性的思考，繼而領略遊戲箇中更深一層的道理呢！

總結全文，以下爲一表以顯示總金幣數 n、每回合翻幣數 k 與最少翻幣次數 s 的關係呢～

k 爲偶數	n 爲 k 的倍數			s＝n/k
	n 不爲 k 的倍數	n＝km＋t , m≧2 , t＜m		s＝m+1
		n＝km＋t , m＝2 , t＜m		s＝3
k 爲奇數	n 爲 k 的倍數			s＝n/k
	n 不爲 k 的倍數	n＝km＋t , t 爲偶數且 2≦t＜k		s＝m+2
		n＝km＋t , t 爲奇數且 t＜k	m＝1	s 爲偶數且符合 s-3＜k/t≦s-1
			m＞1	s＝m+1