JT2-030

第一章:定義

<<幾何原本>>(簡稱<<原本>>)是一本令我又愛又恨的書。愛是愛它的嚴謹。恨是恨它那嚴謹中細小而有極大影響力的不足。以下是我對它部分內容的評價。

它首三句中已帶出了它的第一個不足了:

「定義1。**點**是沒有部分的。

定義2。**線**只有長度而沒有寬度。

定義3。一**線**的兩端是**點**。」

在定義1-3中都是爲點和線下定義。由雀巢定理。歐幾理得對點或線作出了兩個定義。

但名詞只能被下一個定義，否則如出現以下這種等於沒有證明的證明

例如:

定義A:有兩邊相等的叫做等腰三角形

定義B:有兩角相等的叫做等腰三角形

已知△ABC兩邊相等的，求證它的兩角相等

∵△ABC的兩邊相等的　　　　　(已知)

∴△ABC是等腰三角形　　　　　(定義A)

∴△ABC是的兩角相等　　　　　(定義B)

證完

可見，一個良好的幾何系統中，對每個幾何名詞應有並只有一個定義

在23個定義中，我最愛的就是定義14至17這四個有關圓的定義

「定義14。圓是由一條線包圍著的平面圖形，其內有一點與這條線上的點連接成的所有線段都相等。

定義15。而且把這個點叫做圓心。

定義16。的直徑是過圓心而在兩個方向終止在圓周上的任意線段，且把圓二等分。

定義17。半圓是直徑和由它截得的圓弧所圍成的圖形。而且半圓的心和圓心相同。　」

定義14等同是說:半徑(爲方便討論，這裡本段把「半徑」視爲不定義名詞)相等的就是圓，這是一個一針見血的定義。老師教圓形有關的課題時，通常畫出一個圓形(其實是接近圓形)，說:「這就是圓形了，圓的其中一個特性就是半徑相等。」這種方法能令數學能力不高的學生較容易明白。但卻沒有指出圓的本義。其實當我們用使用圓規時，就是劃一個半徑相等的東西。我們把它叫做圓。可見<<原本>>的內容遠比一般數學課堂優勝。

定義16中是一個很取巧的定義，　因爲無法從半徑相等推出直徑把圓平分。所以歐幾理得大師巧妙的把「直徑把圓二等分」這公理透過這定義藏入公設2中。但和定義1-3犯了同一個毛病。「過圓心」和「把圓二等分」同時成了直徑的定義，所以我認爲應這樣表達:

定義 14。當一平面圖形由一條線組成，內有一點與這條線上每點的距離都相等，且通過這點的直線把這平面圖形平分。 這就叫做**圓**。

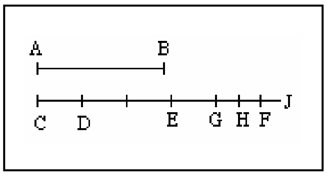
定義 16。這直線叫做**直徑**

我所寫的定義14要求圓是「內有一點與這條線上每點的距離都相等」「通過這點的直線把這平面圖形平分」對圓提出了兩個要求，令人很容易質懷圓形是否存在。但因爲公設2保障了圓的存在。而我們從來不用證明一個圖形是圓。所以這樣能令「直徑把圓二等分」這公理從公理表消失了。雖這不是一個最完美的方法，但這沒有違反演釋幾何的原則，所以我欣賞這定義。
(其實，如果我們不能證明圓的其他特性，我們也能把它強行放入圓的定義中。)

第二章:公設

公設1。 由任意一點到任意一點可作直線。
公設2。 一條有限直線可以繼續延長。
公設3。 以任意點爲圓心及任意的距離可以畫圓。
如果把公設1-3加長小許，能大大增強這公理系統的完備性:
1. 由任意一點到任意**另**一點(本來的公設沒有理會兩點重疊的性況)可以作一條唯一的直線使直線上的每一點都在那兩點所在的平面上。
2. 一條有限直線可以在那直線所在的平面(當正式提出這公設時，應先用修改後的公設一證明直線的每一點在同一平面上。)上延長出有限直線使它的長度超過任何已知的有限直線。
3。 可以用任意點爲圓心，並用以那任意爲端點的直線作半徑，在指定的平面作一個圓。

經過這樣的修改，首先保障了公設一的唯一性。公設一的唯一性曾被暗中引在 I,4*中。而公設二的唯一性能能由上文提及過的「直徑把圓二等分」保障 (方法見 XI,1 「一條直線不可能一部分在平面內，而另一部分在平面外」)
(*I,4 代表第一卷命題四， XI,1 代表第十一卷命題一，後同)
我們圓的唯一性以因半徑相等又已被公理五所保障(若有同心同半徑的兩圓不重疊，則它們在某處的半徑不重疊，違返公理五)，所以不必加在公設中。
在公設中加入有關空間的理論，是保障這些公設在第 11-13 卷中(三維空間)還能照常運作
另外，要注意的是，原本的公設三並沒有指出「任意的距離」是要連接在「任意點」上，但從 I,3 中卻看到這要求(否則不必提出這命題)
而且另一方面，在公設二中加入「使它的長度超過任何已知的有限直線」，這保障了了幾何空間是無限大的。又能證明阿基米德公理:



已知 AB>CD
求證 CD 的數倍能大於 AB
延長 CD 作線 CDH，使 CDH>AB(公設二)
以 CD 量 CH(I,3)，若 CD 量盡 CH，即 CH 是 CD 的數倍，且 CF 大於 AB，證完

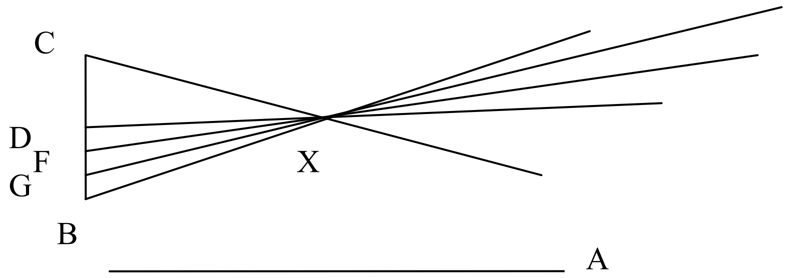
若 CD 量不盡 CH，設餘量是 GH，延長 GH 作 GHJ，使 GJ 大於 CD
作 GF=CD(I,3)。現在 CG，GJ 都是 CD 的數倍
所以 CJ 是 CD 的數倍　(倍數的定義)
且 CJ>CH(公理五)>AB(作圖)
證完

公設4。凡直角都相等。
證明公設2的唯一性後，能證明凡平角階相等(否則重疊後會出現在有分支的直線)，而從公理2能容易推出「等量乘等量，其積仍相等。」由反證法有「等量的一半相等」，又從定義得知，平角的一半是直角，所以我認為公設四是能被證出來的(怪不得我的數學老師教授公設四時，同學們都哈哈大笑，覺得這公設幼稚)。在我看了<基礎幾何>一書後，證明了我這想法是對的

公設5。 同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角的和小於二直角，則這二直線經無限延後在這側相交。
這可是整個幾何原本第二關鍵的部分(絕大部數學家認為這是重關鍵的，但我認為公理四和命題四才是最關鍵的)

首先，我認為有必要向歐幾理得大師討回一個公道。現在不小數學家指出他把公設五按排到命題29才使用。是因為想不出證明公設五的方法。無可否認，他的確證明不到公設五，但這是否他把公設五按排到命題29才使用的原因?我認為不是。如果是的話，他應把公設五也放在10個公理(包括公設，後同)的最後，即在五個公理放在五個公設前並把命題31(證明平行線的存在，但沒有用到公設五)放在命題29前。而且把他先寫出頭26沒有用到公設五的證明是另有必要的。
因為頭26個命題都有是討論簡單作圖，直線和角的關係後並三角形的角和邊的關係，有一定的連冠性。應放在一起。所以這個公設五的可信性無關。

有基礎幾何中，用了這個型式表示公設五
平行公理 :「過直線外一點只能作一條直線與它平行。」
但這兩個形式都欠缺獨立性(部分內容可被證出)
公設五不必指出二線的交點會在內角和小於二直角的一則，因為I,17已保障了交點不會在內角和大於二直角的一則，
而平行公理也可改成「過直線外一點只能作有限條直線與它平行。」因為這樣已能作以下命題



求證過直線外一點能且只能作一條直線與它平行。
設有線A，則點X上只有一線XB和它平行， (I,31)
否則，設XC和XB都/和A平行 (I,31)
連接BC
取BC的中點D (I,10)
若XD不平行A，則XD和A相交，但XB在A和XD中間，所以若XD和A相交，則XD和XB會在另一交點E
過EX有兩條直線，這是不可能的 (修改後的公理一)
所以若XD不能不平行A
則XD平行A
已證平行A的XC和XB中另有一線XD平行A
同理，平行A的XD和XB中另有一線XF平行A
又， 同理，平行A的XD和XF中另有一線XG平行A
又， 同理，平行A的XG和XF中另有一線XH平行A
這樣作下去，則X點上有無限條和A平行
但這是不可能的 (平行公理)
所以XC平行A，且除XC外過X點再沒有其他直線和A平行
已證得直線外一點能且只能作一條直線與它平行。

證完

這個公設是最被數學家所質的，但無數數學家努力下，都不能證明這定理。
我相信:問題出於定義7「平面是它上面的線一樣的平放著的面。」
<<原本>>中，圓形的定理特性建基於能圓形的定義。同時<<原本>>比例論建基於「等比」的等義。
同樣，我相信公設五所保障的平面幾何是建基於平面的定義。
所以，我認爲，只要對平面作出一個完美的定義，這就解決公設五的問題。(但要在用到公設五的命題前都加上「在平面上」四字)
<<原本>>對平面的定義極度含糊。絕非一個好的定義。
如果定義平面爲:「在一面中過直線外一點只能作一條直線與它平行，那面就是平面」
這定義卻難以和我們所認識的平面扯上關係。

如果定義平面爲:「在一面中，任意兩點在這平面中的最短距離都是直線，那面就是平面」
卻不能證明公設五。
如果有一個定義，既是描述我們認識的平面，又能證明公設五，這就是一個完美的定義
證明公設五是我一個心願，在以後的日子中，我會嘗試研究其他幾何空間，從而了解平面幾何的意義。總有一天，我會爲公設五下一個完美的定義。

第三章:公理

1。 等於同量的量彼此相等。
2。 等量加等量，其和仍相等。
3。 等量減等量，其差仍相等。
4。 彼此能重合的物體是全等的。
5。 整體大於部分。

在十個公理中，我最喜歡的就是公理四和五，我留意到公設一至三只是作圖技巧，公設四可被證明，而且用得不多。公設五用得極小。公理一至三是代數的公理，不完全是幾何公理。所以整個原本最重要的公理就是公理四和公理五

也許你會說，公理四也只在命題四時用過一次，它又有何重要?
其實，無數的命題中，公理四也暗中出現過， I,6中，證明ΔGAF≡ΔFAG時和
I,9中，證明ΔDAF≡ΔEAF時，指出AF=AF。不就是用了公理四嗎?I,10-1，12也是如此。
I,21中，提及到AE+EC=AC(AEC是直線)，不也是用了公理四，從AE和EC重合AC，推出AE+EC全等AC嗎?可見公理四是作用貫穿整本<<原本>>的。

細心留意公理四或公理五，它們其實可說是一組公理，它們若這樣表示表
公理四:彼此能重合的物體中，兩者是全等的。
公理五:彼此不能重合的物體中，成爲整體的大於成爲部分的。
可見，公理四是用證明物體的相等， 公理五是用證明物體的不相等
看看公理四的否命題:彼此不能重合的物體中，兩者不是全等的。
公理五只是在「不是全等」這條件上指明那一個較中。

而且，公理五能很直接地證公理四的逆定理:

1求證:全等的物體能夠重合。
若不可以，則平移在一起後，其中一個在餘下一些
所以其中一個較大(公理5。 整體大於部分) 但它們全等 (已知)
這是不可能的，所以它們能夠重合。
證完

可見公理四，五的關係十分緊密。

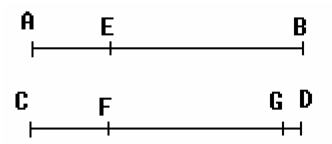
但另一方面，我相信能更進一步，除了公理一外，其餘公理都不用保留
因爲我認爲，以下定義能代替公理四和五

1. 如果把兩個線或兩個角平移在一起，它們全完重疊時，則說他們全等(代替公理四)
2. 若A被分爲B，C兩個部分，則說A=B+C(代替公理四)
3. 若A=B+C，則說A-C=B
4. 若A=B+C，則說A>B(代替公理五)
5. 當面A和面B的的所有對應的線和角都相等，則它們全等

這樣，我們就能用以上定義和公理一證明公理2
求證A=B 則A+C=B+C
設 A+C=D
則 A=D-C(定義 5)
B=D-C(公理一)
B+C=D(定義 5)
由(1)A+C=D
A+C=B+C (公理一)
證完

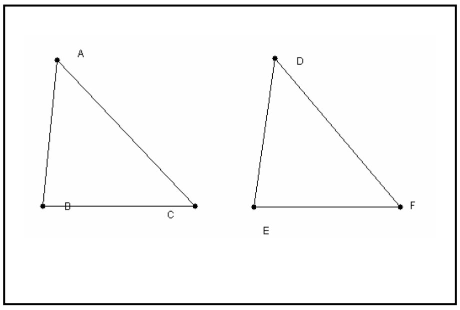
我們可用同樣的方法，也可以用下的反證法證明公理 3

求證等量減等量，其差仍相等。



已知AB=CD
AE=CF
則可證其差EB=FD
若EB不等於FD
則其中一個較大
設較大的是FD
則設GF=BE
GF+FC=BE+EA (已證明了的公理2。)

GC=BA
已知AB=DC
所以GC=DC (公理1。 等於同量的量彼此相等)
但DG+GC=DC (定義2)
即DC大於GC (定義4)
這是不可能的，
所以EB=FD



第四章:命題

我初次認識<<幾何原本>>，是在梁子傑教授的講座中，他介紹了十個公理，並指出這就能證明465個命題。那時我完全不相信，我知道公理五能證明平行線的命題，但餘下的四百多個命題，又如何證明呢?講座後，我想到能用平角的定義和公里二證明「直線上的鄰角」和「鄰角互補」這兩個定理。但仍是不相信這十個公理能如此厲害。我知道如運用全等三角形，能很證明很多定理。但十個公理中沒有保障全等三角形。當我開始看幾何原本時，我從命題一至三都找不到答案，到了命題四，我就看到幾何原本的最大轉折點了。

爲方更討論，我先寫出命題四的證明(但換成現代化符號，後同):
已知AB=DE， ∠BAC=∠EDF，AC=DF
求證ΔABC≌ΔDFE， ∠CBA=∠FED，∠ACB=∠DFE
如果把ΔABC移動到ΔDFE上，若點A落在點D上且線AB落在DE上，
∵AB=DE，∴點B，E重合 (本文作者按:否則違反公理五，下同)
∵AB，DE重合， ∠BAC=∠EDF∴AC，DF重合
∵AC=DF∴C，F重合
∵B，E重合∴BC，EF重合
事實上，若BC不和EF重合，則二線形成一個空間，這是不可能的，所以BC，EF重合
所以二者相等 (公理四)

ΔABC重合ΔDFE，所以ΔABC≌ΔDFE
∵∠CBA重合∠FED，∴∠CBA=∠FED， ∵∠ACB重合∠DFE∴∠ACB=∠DFE　　證完

首先，證明中多次運用到公理四，但有標示出的只有一次，原因何有呢?I,5中，也多次用了I,4，但也只是標出了一次。何見這是歐幾理得的手法。

另一方面，有數學家指出，這命題中，平移線AB和BC受I,3保證，但在平移∠BAC時，暗中用了I,23，所以這命題犯了「循環論證」的錯誤(我認為在幾何中， 「循環論證」這什至可說是罪行)。
但我不同意，無可否認，這命題的確是有漏動，但問題不是出於「循環論證」。
首先，平移線AB和BC時和I,3無關。因為I,3是「已知兩條不相等的線段，試由大的上邊截取一條線段使它等於另外一條。」，其實命所作的是**截取**一條**新的**線段，不是平移一條**本來的**線段。
那麼，這命題如何平移ΔABC?
答案就在這個證明中的首二字:
「如果」!
整個證明也是基於「如果」。不是真的要把它平移，我們只是研究如果把它平移後會發生的事情。可是，如果我們不能把一個三角形平移時，整個證明豈不失了效。我在上文提出的定義「如果把兩個線或兩個角平移在一起，它們全完重疊時，則說線AB=線CD」 也用了「如果」二字，也是為了遷就這命題。這樣，看起來，「平移三角形」好像可被接受。但細心想清楚，能不能平移三角形的問還是沒有解決!

上文提及到，我認為這是整個幾何原本最關鍵部分，比公設五和命題29更重要，是因為這命題和命題29都同讓被質疑，若命題29錯誤，第一卷首28個命題，和第二卷其中24個命題還是成立的。但若命題四錯誤，整本<<原本>>除命題一至三以外的幾何命題(有關數字和比例的命題不受影響)全都錯了。可見這命題的地位極重要。

基礎幾何中，為了解決這問題，引進了公理:
「兩個Δ ABC 和 A'B'C' 若 AB = A'B'、AC = A'C' 和∠CAB = ∠C'A'B'，則必有∠ABC =∠A'B'C'。」
並用反證法，證明「BC = B'C'且∠BCA =∠B'C'A'」以代替命題四。
但證明雖完美，卻一點兒也不漂亮。首先公理必須是不證自明的。但以上這個公理。很容易令人接愛嗎?看看歐基理得的10個公理，除最受質疑的公設五外。相信普遍的小學四年級學生都會明白吧!但這個公理，沒有學到全等三角形的人根本不會明白。
看看和它等價的公理四「彼此能重合的物體是全等的。」它的義意是:
「若兩圖形能重疊，則它們相等」多麼簡單的理論啊!這不就是比較兩個圖形的大小的最簡單方法嗎?就早在小學初期時已教授了，但全等三角形是在初中才教授的。
而且，用無關全等三角形的公理證明全等三角形命題。這樣地「無中生有」才能帶出演釋幾何的奇妙。
所以我認為命題四雖有不足，就絕對有保留的價值。我一直在想辦法，希望能用已有的公理和命

題一至三解決平移三角形的可行性。我相信，總有一天，會有一位被幾何原本所吸引的人完成我這心願。

命題5的內容大致如下

「在等腰三角形中，兩底角彼此相等並且若向下延長兩腰。則在底以下的兩角也彼此相等。」

求證已知等腰ΔABC中，若AB，AC相等，則∠B， ∠C相等

延長AB，AC(公設2)，在延長後的線上取一點D

取AE=AD(I,3)(本文作者按:AE和AD共用A點，那不是應用命題2嗎?)

且AB=AC(已知)

即DB=EC(公理3)

AE=AD(作圖)且AB=AC(已知)，∠A共用

∴ΔABE≌ΔACD(I,4)

∴∠ABE=∠ACD

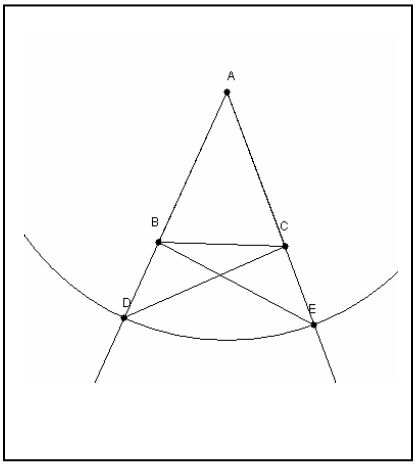
另外 BE=CD 且 ∠E=∠D 加上 即DB=EC(已證)

∴ΔCBE≌ΔBCD(I,4)

∴∠CBE=∠BCD 另外∠ABE=∠ACD

所以∠ABC， ∠ACB(公理3)

證完



我校所用的教科書，證明這定理時，方法是:

設ΔABC反射出ΔA'B'C'

則有ΔABC≌ΔA'C'B'(S。A。S)

∴∠ABC=∠A'C'B'

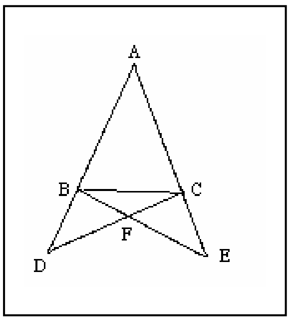
又因反射的原理∠A'C'B'=∠ACB

∴∠ABC=∠A'C'B' =∠ACB

證完

我看了以後，感到不明白。公理中沒有保障射反這方法。其實以上兩個證明都太複雜了。

爲何不直接說ΔABC≌ΔACB∴∠B=∠C呢?



後來，我在某次考試中找到答案

題目是: 右圖中，已知AB=AC，AD=CE，BE=CD

求圖中的全等三角形

我的其中一個答案是ΔFBC≌ΔFCB

老師視這爲錯誤的答案，理由是這是同一個三角形

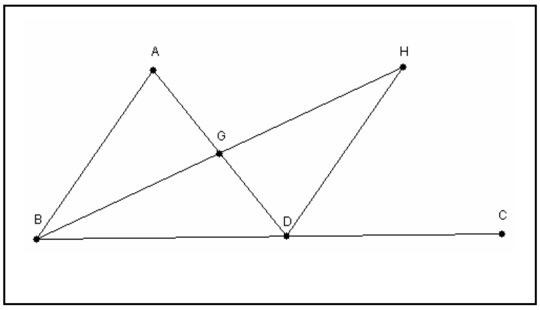
JT2-030

我在此明白到，不是所有人都能接受一個三角形全等於它自己的，所以<<原本>>的證明和「ΔABC≌ΔACB」這證明都有可取的地方。人喜歡哪一個，就接那一個吧!(但原本的證明更證明了兩底角的鄰角相等，這能用在I,8的特殊情況中)

命題6。 「如果在一個三角形中，有兩角彼此相等。則等角所對的邊也彼此相等。」
用命題5和反證法，會得出個出兩個不重疊的全等三角形，也就是違反公理五，所以此命題成立
因為這命題在第一卷中以後再沒有用過，所以數學認為應把這命題放在後面，避免反證法。
但我認為，把逆定理放在定理後面是應當的，所以法反證法不是問題。但這證明中，用到了面積的概念，所以，若不能為面積一下個精準的定義，就只好把命題6押後。

命題16如下:「在任意的三角形中，若延長一邊，則外角大於任何一個內對角。

在ΔABD 中，BDC 是直線 則 ∠ADC>∠BAD 和∠ABD



作 G 平分線 AD(I,10)，延長 BG 至 BH，使 GH=BG(I,3)

BG=GH (作圖) AG=GD(作圖) ∠AGB=∠DGH(I,15)

∴ΔAGB≌ΔDGH(I,4)

∠BAD=∠GDH(1。2，定義 C7) 且 ∠ADC>∠GDH(公理五)

∴∠ADC>∠BAD

同理 也可證∠ADC>∠ABD 證完」

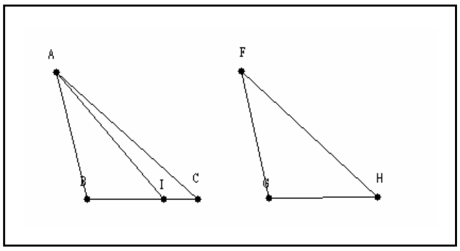
在之後七個有關三角形不等關係的問題中，都是由這個命題開始的。可見這個命題的重要性

另一方面，這是第一次有**標示地**使用公理五(其實命題 6，7 和 14 時己暗中使用過。)
這證明中，用尺規作圖的方法把兩個角放在一起，這樣巧妙地運用了公理五的精髓。寫下了三角不等關係的基礎。歐幾理得可能想顯出公理五在命題的中的重要性，所以有之前一直不標示出用了公理五，令這命題成為首個應用公理五的命題。

命題26「如果在兩個三角形中，一個的兩個角分別等於另一個的兩個角，而且一邊等於另一個的一邊。即或者這邊是等角的夾邊，或者是等角的對邊。則它們的其他的邊也等於其他的邊，且其

他的角也等於其他的角。」這就是現代的A.S.A和A.A.S.
<<原本>>中卻用了畢氏定理來證明R.H.S.這不但間接用了公設五，更暗中用了「等邊上的方相等」和「等方的邊相等」這兩個沒有證明過的定理。
其實，我發現用和I, 26同樣的方法，也可證明R.H.S，不單是R.H.S.。就是「R」不是直角而是鈍角的清況也可以證明出來。

求證二邊相等而不是夾角的角相等且不小於直角的兩個三角形是全等
即圖中，AB=FG，AC=FH，∠B=∠G≥直角
求證ΔABC全等ΔFGH
若BC=GH，ΔABC全等ΔFGH(I,4)
證完
若BC不=GH，設較大的是BC
在BC取I點使BI=GH (I,3)
AB=FG(已知)
∠B=∠G(已知)
所以 ΔABI全等ΔFGH，即AI=FH(I,4)
AC=FH(已知)
所以AI=AC(公理一)
∠AIC=∠ACI (I,5).........(1)
但∠AIC但>∠B(I,16)
∠B≥直角(已知)
所以∠AIC>直角
所以∠ACI>直角(由(1))
∠AIC+∠ACI>二直角
這是不可能的 (I,17)
所BC=GH
ΔABC全等ΔFGH(I,4)
證完



其實，幾何原本中值得討論的地方還有很多，但篇幅有限，未能盡錄。